

# ARCHIV FÜR ELEKTROTECHNIK

IM EINVERNEHMEN MIT DEM VERBAND DEUTSCHER ELEKTROTECHNIKER e. V. (VDE)

HERAUSGEGEBEN VON

J. FISCHER      UND      W. NÜRNBERG

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

46. BAND

1961

ZWEITES HEFT

## Inhaltsverzeichnis

	Seite
F. OLLENDORFF: Die Feldtheorie ungleichförmig laufender Induktionsmaschinen. Mit 6 Textabbildungen	65
M. CANAY: Allgemeine Theorie der Synchron- und Asynchronmaschinen in der Operator-Matrix-Darstellung. Mit 6 Textabbildungen	83
W. BÖNING: Schaltvorgänge in Gleichstromkreisen mit nichtlinearem Widerstand und nichtlinearer Induktivität. Mit 19 Textabbildungen	103

*Vor kurzem erschien:*

**Ludwig Prandtl**

**Gesammelte Abhandlungen**

zur angewandten Mechanik, Hydro- und Aerodynamik

Herausgegeben im Auftrage

der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften, der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt und der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik

von

WALTER TOLLMIEHN, Göttingen · HERMANN SCHLICHTING, Göttingen · HENRY GÖRTLER, Freiburg i. Br.

Schriftleitung: F. W. RIEGELS, Göttingen

In 3 Teilen mit einem Porträt und 1003 Abbildungen.

Teil I: XX, 574 Seiten; Teil II: XIV, 496 Seiten; Teil III: XIV, 550 Seiten Gr.-8°. 1961.

DM 273,—; Ganzleinen DM 288,—

Ausführlicher Prospekt steht zur Verfügung

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG



Das

**Archiv für Elektrotechnik**

erscheint nach Maßgabe der eingehenden Arbeiten zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung zwanglos in einzeln berechneten Heften.

**Nachdruck:** Mit der Annahme des Manuskripts eines Beitrages für die Zeitschrift „Archiv für Elektrotechnik“ erwirbt der Springer-Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder, einschließlich des Rechts der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung. — Im „Archiv für Elektrotechnik“ erscheinende Arbeiten dürfen vorher nicht an anderer Stelle veröffentlicht worden sein und auch später nicht anderweitig, weder im Inland noch im Ausland, veröffentlicht werden. Ausnahmen von dieser Regel bedürfen einer entsprechenden Vereinbarung zwischen Autor, Herausgeber und Verlag.

**Fotokopien:** Aufgrund des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens ist jedoch die Anfertigung fotomechanischer Kopien eines Beitrages gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch gestattet, sofern der Hersteller oder Benutzer jede Seite dieser Kopie mit einer Gebühren-Wertmarke im Betrag von DM 0,30 kenntlich macht. (Diese Marken sind zu beziehen vom Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. (Inkasso-Stelle) Frankfurt/M., Großer Hirschgraben 17/19. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.* Die Verpflichtung zur Verwendung von Gebühren-Wertmarken entfällt, falls der Hersteller von Kopien mit dem Springer-Verlag ein Pauschalabkommen über die Kopie-Gebühren-Entrichtung vereinbart hat.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch und wissenschaftlicher Veröffentlichungen“ hingewiesen (Geschäftsstelle Berlin W 15, Uhlandstr. 175), ebenso auf die Normblätter DIN 1304, Allgemeine Formelzeichen, und DIN 1302, Mathematische Zeichen. Es wird gebeten, an den Anfang jeder Abhandlung eine Übersicht zu stellen, am Ende eine Zusammenfassung zu geben. Die Übersicht soll den eiligen Leser über die Einteilung (den Gedankengang), die Zusammenfassung über die wesentlichen Ergebnisse der Arbeit unterrichten. Am Schluß jedes Manuskriptes ist die vollständige Anschrift des Verfassers anzugeben. Im Manuskript sind griechische Buchstaben rot, Frakturbuchstaben blau, geradstehende Buchstaben gelb zu unterstreichen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klar verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung, notfalls auch die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Von jeder Arbeit werden zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich geliefert.

Manuskripte sind zu senden:

Für die Gebiete: Grundlagen, Theorie, Meßtechnik, Schwachstromtechnik usw. an: Prof. Dr.-Ing. JOHANNES FISCHER, (17a) Karlsruhe i. Baden, Schirmerstraße 6.

Für die Gebiete: Starkstromtechnik, Energieübertragung, Hochspannungstechnik usw. an: Prof. Dr.-Ing. WERNER NÜRNBERG, (1) Berlin-Charlottenburg 2, Technische Universität.

Manuskripte, die bei dem unterzeichneten Verlag in Berlin oder Heidelberg eingehen, wird dieser sofort dem zuständigen Herausgeber übermitteln.

**SPRINGER-VERLAG**

Berlin-Wilmersdorf  
Heidelberger Platz 3, Fernspr.: Sammel-Nr. 830301.  
Fernschreib-Nr. 01-83 319

Heidelberg  
Neuenheimer Landstraße 28—30, Fernspr. 27901  
Fernschreib-Nr. 04-61 723

*Vor kurzem erschienen:*

**Energiebilanz und Rentabilität von Heizkraftwerken**

Von Dr. Ing. HERBERT BACHL,

Werkdirektor der Stadtwerke-Elektrizitätswerke München

Mit 20 Abbildungen. 78 Seiten Gr.-8°. 1961. DM 18,—

**INHALTSÜBERSICHT**

Energietechnik und Heizkraft · Aufgabenstellung, Bezeichnungen und Symbole · Prinzipschaltungen und Energiefluß von Heizkraftwerken · Maßnahmen zur Steigerung der Energieausbeute · Schaltungen und Temperaturverlauf der Heizwärmeübertragung · Energiebilanzen von Heizkraftwerken · Annahmen und Rechnungsgang für Vergleiche verschiedener Auslegungen von Heizkraftwerken · Vergleich von Kraftwerksleistung und Kapitalbedarf bei gleicher Jahresstromabgabe · Vergleich von Kraftwerksleistung und Kapitalbedarf bei gleicher Jahresheizwärmeabgabe · Zusammenfassung · Literatur- und Sachverzeichnis.

**SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG**



## Die Feldtheorie ungleichförmig laufender Induktionsmaschinen

Von

FRANZ OLLENDORFF

(Mitteilung aus dem Forschungsinstitut für Höhere Elektrotechnik  
des Technion, Israel Institute of Technology, Haifa)

Mit 6 Textabbildungen

(Eingegangen am 12. 7. 1960)

**Inhaltsübersicht:** 1. Ziel der Arbeit — 2. Das Maschinenmodell — 3. Die Grundgleichungen — 4. Lösung der Feldgleichungen bei ständerseitiger Wanderfeld-Erregung — 5. Sonderfälle — 6. Zusammenfassung.

### 1. Ziel der Arbeit

Die Dynamik elektrischer Maschinen wird von dem simultanen Ablauf elektromagnetischer und kinetischer Ausgleichsvorgänge beherrscht. Häufig darf man nun die elektromagnetischen Feldänderungen als bereits wesentlich abgeschlossen betrachten, ehe die beweglichen Maschinenteile merklich beschleunigt oder verzögert werden; die Analyse der tatsächlich einheitlichen Erscheinung darf dann gedanklich in einen rein elektromagnetischen Vorgang bei stationärem Bewegungszustand und einen lediglich mechanischen Vorgang bei stationärer oder quasistationärer Struktur des elektromagnetischen Feldes zerlegt werden, deren letztgenannter dem erstgenannten zeitlich nachfolgt. Dieses separierende Verfahren versagt jedoch bei der Beschreibung rascher Steuervorgänge, welche den Betrieb neuzeitlicher Regelmotoren kennzeichnen: Während die sozusagen klassische Theorie der elektrischen Maschinen deren elektromagnetisches Feld unter der Voraussetzung einer jeweils gleichförmigen Läufergeschwindigkeit schildert, verlangt eine hinreichend genaue Beschreibung jener Steuermaschinen die Erweiterung ihrer Feldanalyse auf den Fall der ungleichförmigen Läuferbewegung. In der vorliegenden Arbeit soll ein erster Ansatz zur Lösung der genannten, recht umfangreichen Aufgabe mitgeteilt werden, indem wir das Feld ungleichförmig bewegter Induktionsmaschinen untersuchen.

### 2. Das Maschinenmodell

Wir beziehen uns weiterhin auf das in Bild 1 dargestellte Modell einer „planparallelen“ Induktionsmaschine, innerhalb dessen wir uns an zwei relativ zu einander bewegten, je rechteckigen KARTESISCHEN Koordinatensystemen orientieren:

I. Der Ursprung  $O$  des „ungestrichenen Bezugssystems  $(x; y; z)$ “ ruhe in der „aktiven“ Oberfläche des Ständers, welche an den Luftspalt der festen Weite  $\delta$  grenzt. Sei  $l > 0$  die wirksame Länge des Ständers bei Ausschluß seiner Wickelköpfe, so weisen wir ihm die Schicht

$$(-\infty) < x < \infty; \quad y \geq 0; \quad -\frac{1}{2}l \leq z \leq \frac{1}{2}l \quad (1)$$

als Existenzbereich zu. Der Träger seines magnetischen Induktionsflusses erfülle das Gebiet  $y > 0$  der Schicht (1) lückenlos als vollkommen magnetisierbarer Stoff der ideellen Permeabilität  $\mu \rightarrow \infty$  bei gleichzeitig verschwindender elektrischer Leitfähigkeit; dagegen diene die Ebene  $y = 0$  selbst als starrer Halt der Ständerwicklung, welche wir modellmäßig durch



ideelle, widerstandsfreie Strombänder der parallel zur  $z$ -Achse orientierten Stromrichtung darstellen. Die laufende Zeit  $t$  des ungestrichenen Bezugssystems werde mittels eines Satzes in ihm ruhender, untereinander synchronisierter „Normaluhren“ gemessen.

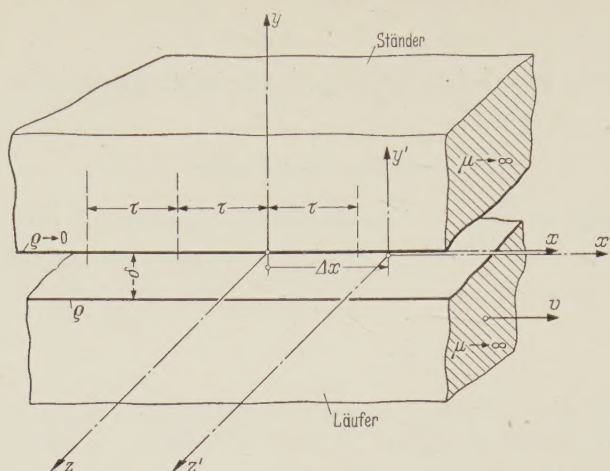


Bild 1. Modell einer planparallelen Induktionsmaschine.

II. Das „gestrichene“ Bezugssystem  $(x'; y'; z')$  sei dem Läufer verhaftet. In ihm werde der Ablauf der Zeit  $t'$  mittels eines weiteren Satzes von Normaluhren bestimmt, welche zwar strukturell jenen des ungestrichenen Systemes gleichen, jedoch relativ zum Läufer ruhen und unter eben dieser kinematischen Bedingung synchronisiert wurden. Ungeachtet dieses wesentlichen Unterschiedes dürfen wir, ohne die Allgemeinheit der folgenden Überlegungen zu beeinträchtigen, den Anfang der gestrichenen Zeit  $t'$  mit dem Beginn der ungestrichenen Zeit  $t$  identifizieren; überdies sollen die Richtungen der Achsen  $(x'; y'; z')$  beziehentlich stets parallel zu jenen der Achsen  $(x; y; z)$  weisen, und im Augenblick  $t' = t = 0$  möge der Ursprung  $O'$  des gestrichenen Systemes mit dem Ursprung  $O$  des ungestrichenen Systemes koinzidieren. Aus diesen Festsetzungen folgen nach Wahl einer passenden Metrik die Relationen

$$y' = y \quad (2)$$

und

$$z' = z. \quad (3)$$

Sei daher

$$l' = l, \quad (4)$$

die wirksame Länge des Läufers bei Ausschluß seiner Wickelköpfe, so erfassen die geometrischen Angaben

$$(-\infty) < x' < \infty; \quad y' \leq (-\delta); \quad -\frac{1}{2}l \leq z' \leq \frac{1}{2}l \quad (5)$$

seinen Existenzbereich; wir ergänzen sie in physikalischer Hinsicht, indem wir das Gebiet  $y' < (-\delta)$  der Schicht (5) als Träger des magnetischen Induktionsflusses abermals mit der ideellen Eigenschaft  $\mu \rightarrow \infty$  der vollkommenen Magnetisierbarkeit bei gleichzeitig verschwindender elektrischer Leitfähigkeit ausstatten, während die an den Luftspalt grenzende Ebene  $y' = -\delta$  einen homogenen und isotropen Flächenleiter vom spezifischen Widerstande  $\varrho$  (Dimension: Elektrische Feldstärke im Verhältnis zum Strombelag, technische Maßeinheit  $\left(\frac{\text{V}}{\text{m}}\right) : \left(\frac{\text{A}}{\text{m}}\right) = \text{Ohm!}$ ) beherberge.

### 3. Die Grundgleichungen

Es sei

$$v = v(t), \quad (6)$$

die im ungestrichenen System gemessene, in der Regel ungleichförmige Geschwindigkeit des Läufers relativ zum Ständer. Wie hat man die Angaben (2) und (3) zu ergänzen, um die Gesamtheit  $(x; y; z; t)$  der Weltkoordinaten eines im ständerfesten System beobachteten Ereignisses auf die Weltkoordinaten  $(x'; y'; z'; t')$  des nämlichen Ereignisses umzurechnen, welche ein im läuferfesten System postierter Beobachter wahrnimmt?

Die strenge Beantwortung dieser Frage ist nur auf dem Boden der Allgemeinen Relativitätstheorie möglich. Um jedoch die sehr erheblichen Schwierigkeiten zu umgehen, welche dieser Disziplin innewohnen, werden wir uns weiterhin mit einer allerdings nur approximativ gültigen Erweiterung der beschränkten Relativitätstheorie begnügen, welche stichwortartig durch den Begriff der infinitesimal schwachen Beschleunigung gekennzeichnet werden mag: Es sei  $c$  die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes im leeren Raume und

$$\beta = \beta(t) = \frac{v(t)}{c}, \quad (7)$$

der in dieser natürlichen Einheit gemessene, dimensionsfreie [„numerische“] Wert der jeweils im Zeitpunkt  $t$  herrschenden Läufergeschwindigkeit. Von den stets gültigen Integralgleichheiten (2) und (3) vorübergehend zu den differentiellen Aussagen

$$dy' = dy \quad (8)$$

und

$$dz' = dz \quad (9)$$

absteigend, stellen wir ihnen die durchaus auf den Augenblick  $t$  beschränkten Angaben

$$dx' = \frac{dx - v(t) dt}{\sqrt{1 - \beta^2(t)}} \quad (10)$$

und

$$dt' = \frac{dt - \frac{v(t)}{c^2} dx}{\sqrt{1 - \beta^2(t)}}, \quad (11)$$

der unserem Bezugssystem angepaßten, speziellen LORENTZ-Transformation zur Seite. Von ihr gelangen wir auf Grund des gemeinsamen Ursprunges der Welt-Bezugssysteme  $(x'; y'; z'; t')$  und  $(x; y; z; t)$  durch Integration zu den Aussagen

$$x' = \frac{x}{\sqrt{1 - \beta^2(t)}} - c \int_0^t \frac{\beta(\bar{t})}{\sqrt{1 - \beta^2(\bar{t})}} d\bar{t} \quad (12)$$

und

$$t' = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2(\bar{t})}} d\bar{t} - \frac{v(t)}{c^2} \frac{x}{\sqrt{1 - \beta^2(t)}}, \quad (13)$$

welche die gesuchte Ergänzung der Gln. (2) und (3) liefern.

Durch  $V'$  und  $V$  das magnetische Vektorpotential sowie durch  $\varphi$  und  $\varphi'$  das elektrische Skalarpotential des elektrodynamischen Feldes beziehentlich im läufergebundenen und im ständerfesten System der Konfigurationskoordinaten bezeichnend, bilden wir aus ihnen die elektromagnetischen Viererpotentiale beziehentlich der Komponenten  $V'_{x'}$ ;  $V'_{y'}$ ;  $V'_{z'}$ ;  $i \frac{\varphi'}{c}$  und  $V_x$ ;  $V_y$ ;  $V_z$ ;  $i \frac{\varphi}{c}$ . Da sie definitionsgemäß untereinander durch die nämliche Transformation verknüpft sind, welche den Übergang vom infinitesimalen Weltvektor der



Komponenten  $dx'$ ;  $dy'$ ;  $dz'$ ;  $i c dt'$  zu jenem der Komponenten  $dx$ ;  $dy$ ;  $dz$ ;  $i c dt$  regelt, entnehmen wir aus (8), (9), (10) und (11) die Relationen

$$V_{x'} = \frac{V_x - \frac{v(t)}{c^2} \varphi}{\sqrt{1 - \beta^2(t)}}; \quad V_{y'} = V_y, \quad V_{z'} = V_z \quad (14)$$

und

$$\varphi' = \frac{\varphi - v(t) V_x}{\sqrt{1 - \beta^2(t)}}. \quad (15)$$

Im Lichte dieser Gleichungen können wir die beabsichtigte Beschreibung des Feldes innerhalb der Maschine wesentlich vereinfachen, indem wir die tatsächlich den Ständer vom Läufer trennende Luftschicht durch ein allerdings nur fiktives Medium ersetzen, dessen [relative] Dielektrizitätskonstante verschwindet: Der [dreidimensionale] Vektor der elektrischen Induktion fällt notwendig quellenfrei aus. Dieser Bedingung genügen wir gewiß durch den Ansatz

$$\varphi = 0, \quad (16)$$

welcher das elektrische Feld relativ zum ständerfesten Bezugssystem als reines Wirbelfeld kennzeichnet; wir passen es durch die Zusatzannahmen

$$V_x = 0; \quad V_y = 0 \quad (17)$$

der früher beschriebenen Ständerwicklung unseres Maschinenmodells bei Ausschluß ihrer Wickelköpfe an. Unter Berufung auf (14) und (15) ziehen nun die Gleichungen (16) und (17) die Angaben

$$\varphi' = 0, \quad (18)$$

sowie

$$V_{x'} = 0; \quad V_{y'} = 0 \quad (19)$$

nach sich: Die Elektrodynamik der Maschine reduziert sich auf das Studium allein der Komponenten  $V_{z'}$  und  $V_z$  des magnetischen Vektorpotentials, und diese erweisen sich überdies bei der Transformation vom läuferfesten zum ständerfesten Bezugssystem sogar der erweiterten, zeitabhängigen LORENTZ-Transformation gegenüber als invariant! Um diesen wichtigen Satz explizit zu formulieren, dürfen wir ungeachtet seiner letztthin relativistischen Wurzel im Rahmen seiner hier beabsichtigten technischen Anwendungen getrost den Grenzübergang  $c \rightarrow \infty$  zur NEWTONschen Kinematik ausführen. Hierdurch verwandeln sich die Gln. (12) und (13) beziehentlich in die Aussagen

$$x' = x - \Delta x; \quad \Delta x = \int_0^t v(\bar{t}) d\bar{t} \quad (20)$$

und

$$t' = t, \quad (21)$$

welche die GALILEI-Transformation auf relativ zu einander ungleichförmig bewegte Bezugssysteme verallgemeinert. Da wir nun nach Vereinbarung die Wickelköpfe der Maschine außer acht lassen, hängen die Vektorpotentiale  $V_z$  und  $V_{z'}$  beziehentlich nicht von den „Längskoordinaten“  $z'$  und  $z$  ab: Der funktionelle Ansatz

$$V_z = V_z(x; y; t), \quad (22)$$

des im ständerfesten System gemessenen Vektorpotentials zieht auf Grund der bewiesenen Invarianz im Verein mit (2), (20) und (21) die Darstellung

$$V_{z'} = V_z(x' + \Delta x; y'; t), \quad (23)$$

des im läufergebundenen Systeme wirksamen Vektorpotentials nach sich. Daher findet man die beziehentlich achsenparallelen Komponenten der magnetischen Induktion  $B$  aus

$$B_x = \frac{\partial V_z}{\partial y}; \quad B_y = -\frac{\partial V_z}{\partial x}; \quad B_z = 0 \quad (24)$$

und

$$B_{x'} = \frac{\partial V_{z'}}{\partial y'} = B_x; \quad B_{y'} = -\frac{\partial V_{z'}}{\partial x'} = B_y; \quad B_{z'} = 0. \quad (25)$$

Durch  $\Pi_0$  die sogenannte absolute Permeabilität des leeren Raumes einföhrend, ergeben sich aus (24) und (25) in völlig ausreichender Genauigkeit die beziehentlich achsenparallelen Komponenten der magnetischen Feldstärke  $H$  im Gebiete des Luftspaltes zu

$$H_x = \frac{1}{\Pi_0} \frac{\partial V_z}{\partial y}; \quad H_y = -\frac{1}{\Pi_0} \frac{\partial V_z}{\partial x}; \quad H_z = 0 \quad (26)$$

und

$$H'_{x'} = \frac{1}{\Pi_0} \frac{\partial V'_{z'}}{\partial y'}; \quad H'_{y'} = -\frac{1}{\Pi_0} \frac{\partial V'_{z'}}{\partial x'}; \quad H'_{z'} = 0, \quad (27)$$

während sowohl im Halbraum  $y < 0$  wie im Halbraum  $y' < (-\delta)$  die magnetische Feldstärke gemäß der Annahme  $\mu \rightarrow \infty$  [vollkommene Permeabilität!] durch „Kurzschluß“ vernichtet wird. Im Hinblick auf die Erste MAXWELLSche Feldgleichung gibt daher der Sprung der  $x$ -Komponente der magnetischen Feldstärke an der Ebene  $y = 0$  den dort parallel der  $z$ -Achse fließenden Ständerstrombelag  $A$  an:

$$A = \lim_{y \rightarrow (-0)} H_x = \frac{1}{\Pi_0} \lim_{y \rightarrow (-0)} \frac{\partial V_z}{\partial y}, \quad (28)$$

während der in der Ebene  $y' = (-\delta)$  konzentrierte, der  $z'$ -Achse parallel gerichtete Läuferstrombelag  $A'$  mit dem Sprung der  $x'$ -Komponente der magnetischen Feldstärke an der nämlichen Ebene durch die Relation

$$A' = -\lim_{y' \rightarrow (-\delta)} H'_{x'} = -\frac{1}{\Pi_0} \lim_{y' \rightarrow (-\delta)} \frac{\partial V'_{z'}}{\partial y'} \quad (29)$$

verknüpft ist.

Die beziehentlich achsenparallelen Komponenten der elektrischen Feldstärke folgen mit Rücksicht auf (16) und (18) relativ zum ständerfesten System aus den Bildungsvorschriften

$$E_x = 0; \quad E_y = 0; \quad E_z = -\frac{\partial V_z}{\partial t}. \quad (30)$$

Dagegen trifft man im läufergebundenen Bezugssystem die elektrischen Feldstärkekomponenten

$$E'_{x'} = 0; \quad E'_{y'} = 0; \quad E'_{z'} = -\frac{\partial V'_{z'}}{\partial t} \quad (31)$$

an. Im Verein mit (20), (22), (23) und (24) resultiert aus (30) und (31) die „klassische“ Relation

$$E'_{z'} = E_z + v(t) \frac{\partial V_z}{\partial x} = E_z - v(t) \cdot B_y, \quad (32)$$

welche somit — im Rahmen der hier benutzten Näherungen — den kinetischen Induktionsvorgang auch bei ungleichförmiger Bewegung des Läufers regelt!

Da wir nach Vereinbarung dem Luftspalt die Fähigkeit zur Bildung einer elektrischen Induktion absprechen, verschwindet im Existenzgebiet dieses fiktiven Mediums die Dichte sowohl des elektrischen Konvektionsstromes wie des MAXWELLSchen Verschiebungsstromes. Unter abermaliger Berufung auf die Erste MAXWELLSche Feldgleichung lehren somit die Relationen (26), daß  $V_z$  relativ zum ständerfesten Systeme der LAPLACESchen Gleichung

$$\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} = 0 \quad (33)$$

genügt, und ebenso erschließt man aus (27) die LAPLACESche Gleichung

$$\frac{\partial^2 V'_{z'}}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 V'_{z'}}{\partial y'^2} = 0 \quad (34)$$

für  $V'_{z'}$ .

#### 4. Lösung der Feldgleichungen bei ständerseitiger Wanderfeld-Erregung

Es sei ein mit der Frequenz  $f$ , also der Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi f$  einfach harmonisch pulsierendes Wechselstromnetz unendlich vieler Phasen gegeben, welches der Ständerwicklung unseres Maschinenmodelles ein parallel der positiven  $x$ -Achse mit der konstanten Phasengeschwindigkeit  $v_{ph}$  fortschreitendes elektrisches Längsfeld der Amplitude  $E_0$  auftrage

$$[E_z]_{y=0} = E_0 \sin \omega \left( t - \frac{x}{v_{ph}} \right). \quad (35)$$



In der Regel schreibt man konstruktiv seine Halbwellenlänge oder, in technischer Terminologie, die Polteilung

$$\tau = \frac{1}{2} \frac{v_{ph}}{f} = \pi \frac{v_{ph}}{\omega}, \quad (36)$$

der Ständerwicklung vor; es empfiehlt sich dann, die Darstellung (35) des aufgeprägten Wanderfeldes durch

$$[E_x]_{y=0} = E_0 \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{\tau} x \right) \quad (37)$$

zu ersetzen. Gesucht wird das von ihm im Luftspalte der Maschine geweckte magnetische Vektorpotential als Mutterfunktion ihres gesamten elektromagnetischen Feldes.

Als Primärpotential  $V_z^{(p)}$  bezeichnen wir jenen Anteil des gesuchten Vektorpotentials, welcher bei verschwindender Läuferströmung verbleibt. Im Lichte der Relationen (23) und (29) genügen wir dieser dynamischen Bedingung nach Wahl der vorerst willkürlichen Amplitudenkonstanten  $V_0$  und  $V_1$  durch das Partikularintegral

$$V_z^{(p)} = V_0 \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{\tau} x \right) \cosh \frac{\pi}{\tau} (y + \delta) + V_1 \cdot \cos \frac{\pi}{\tau} x \cosh \frac{\pi}{\tau} (y + \delta), \quad (38)$$

der LAPLACESchen Gleichung (33). Um es überdies den Betriebsdaten (37) der Ständerwicklung anzupassen, bilden wir zunächst nach (30)

$$E_z^{(p)} = V_0 \omega \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{\tau} x \right) \cosh \frac{\pi}{\tau} (y + \delta) \quad (39)$$

und erhalten durch Vergleich mit (37)

$$V_0 = \frac{E_0}{\omega \cosh \frac{\pi}{\tau} \delta}. \quad (40)$$

Nach (26) ergibt sich nunmehr für die  $x$ -Komponente der primären magnetischen Feldstärke im ständerfesten Bezugssystem die Formel

$$\begin{aligned} H_x^{(p)} &= \frac{E_0}{\omega H_0 \cosh \frac{\pi}{\tau} \delta} \cdot \frac{\pi}{\tau} \cdot \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{\tau} x \right) \sinh \frac{\pi}{\tau} (y + \delta) \\ &+ \frac{V_1}{H_0} \cdot \frac{\pi}{\tau} \cdot \cos \frac{\pi}{\tau} x \cdot \sinh \frac{\pi}{\tau} (y + \delta), \end{aligned} \quad (41)$$

so daß gemäß (28) die Gleichung

$$A^{(p)} = \frac{E_0}{\omega H_0} \cdot \operatorname{tgh} \frac{\pi}{\tau} \delta \cdot \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{\tau} x \right) + \frac{V_1}{H_0} \cdot \frac{\pi}{\tau} \cdot \sinh \frac{\pi}{\tau} \delta \cdot \cos \frac{\pi}{\tau} x, \quad (42)$$

über die räumliche Verteilung und den zeitlichen Verlauf des primären Ständerstrombelages oder, kurz, über den Leerlauf-Strombelag der Maschine Auskunft erteilt. Insbesondere mag angenommen werden, daß dieser im „Einschalt-Augenblick“  $t = 0$  identisch verschwinde:

$$A^{(p)} = 0 \quad \text{für } t = 0. \quad (43)$$

Man genügt dieser Anfangsbedingung durch die Wahl

$$V_1 = - \frac{E_0}{\omega \cosh \frac{\pi}{\tau} \delta}, \quad (44)$$

sodaß (42) die Angabe

$$A^{(p)} = \frac{E_0}{\omega H_0} \cdot \frac{\pi}{\tau} \cdot \operatorname{tgh} \frac{\pi}{\tau} \delta \left[ \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{\tau} x \right) - \cos \frac{\pi}{\tau} x \right] \quad (45)$$

liefert. Neben seiner überall mit der Kreisfrequenz  $\omega$  einfach harmonisch schwingenden Komponente

$$A_1^{(p)} = \frac{E_0}{\omega H_0} \cdot \frac{\pi}{\tau} \cdot \operatorname{tgh} \frac{\pi}{\tau} \delta \cdot \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{\tau} x \right), \quad (46)$$



enthält also der Leerlauf-Strombelag die zeitfreie „Gleichstrom“-Komponente

$$A_2^{(p)} = -\frac{E_0}{\omega H_0} \cdot \frac{\pi}{\tau} \cdot \operatorname{tgh} \frac{\pi}{\tau} \delta \cdot \cos \frac{\pi}{\tau} x. \quad (47)$$

Allerdings ist dieses auf den ersten Blick gewiß überraschende Ergebnis der Theorie durchaus an die vereinfachende Voraussetzung einer ideellen, widerstandsfreien Ständerwicklung gebunden. Würde man diese Annahme fallen lassen, so hätte man die Aussage (47) durch einen Strombelag zu ersetzen, der nach Maßgabe des tatsächlichen Ständerwiderstandes exponentiell verlöscht; nach Verlauf einer hinreichend langen Zeit findet man daher praktisch nur noch den in (46) beschriebenen Wechselanteil des primären Strombelages in der Ständerwicklung vor.

Welches elektrische Primärfeld wird auf der aktiven Oberfläche des Läufers induziert?

Nach (23), (38), (40) und (44) beobachtet man relativ zum läufergebundenen Bezugssystem das primäre Vektorpotential

$$V_{z'}^{(p)} = \frac{E_0}{\omega \cosh \frac{\pi}{\tau} \delta} \left[ \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{\tau} \{x' + \Delta x\} \right) - \cos \frac{\pi}{\tau} \{x' + \Delta x\} \right] \cosh \frac{\pi}{\tau} (y' + \delta). \quad (48)$$

Gemäß (20) und (31) findet man hieraus

$$E_{z'}^{(p)} = \frac{E_0}{\cosh \frac{\pi}{\tau} \delta} \left[ \left( 1 - \frac{\pi v(t)}{\tau \omega} \right) \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{\tau} \{x' + \Delta x\} \right) - \frac{\pi v(t)}{\tau \omega} \sin \frac{\pi}{\tau} \{x' + \Delta x\} \right] \cosh \frac{\pi}{\tau} (y' + \delta). \quad (49)$$

Mit Rücksicht auf (36) durch

$$s = s(t) = 1 - \frac{\pi v(t)}{\tau \omega} = 1 - \frac{v(t)}{v_{ph}}, \quad (50)$$

die zeitabhängige Schlüpfung einführend, erhalten wir also das gesuchte elektrische Primärfeld an der aktiven Läuferoberfläche als Summe zweier Komponenten

$$[E_{z'}^{(p)}]_{y'=(-\delta)} = E_I^{(p)} + E_{II}^{(p)}, \quad (51)$$

deren erste dem ständerseitigen Wanderfeld genetisch verbunden ist

$$E_I^{(p)} = \frac{E_0}{\cosh \frac{\pi}{\tau} \delta} s \cdot \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{\tau} \{x' + \Delta x\} \right), \quad (52)$$

während  $E_{II}^{(p)}$  dem Gleichstrom-Ständerstrombelag entstammt

$$E_{II}^{(p)} = -\frac{E_0}{\cosh \frac{\pi}{\tau} \delta} (1 - s) \sin \frac{\pi}{\tau} \{x' + \Delta x\} \quad (53)$$

und daher, entgegen seiner hier gegebenen analytischen Beschreibung, bei hinreichend langem Zuwarten nach dem Anschluß der Maschine an das Netz tatsächlich unmerklich schwach geworden ist. Im Lichte dieser Erkenntnis empfiehlt es sich, auch den durch  $[E_{z'}^{(p)}]_{y'=(-\delta)}$  erregten Läuferstrombelag  $A'$  in die beziehentlich den elektrischen Feldkomponenten  $E_I^{(p)}$  und  $E_{II}^{(p)}$  zugeordneten Komponenten  $A'_I$  und  $A'_{II}$  des Strombelages zu zerlegen; zufolge der Linearität der Feldgleichung sind wir der ungestörten Überlagerung beider Anteile sicher.

#### 4.1. Das wanderfelderregte Sekundärfeld $V_{z,I}^{(s)}$

Da definitionsgemäß bereits das primäre Vektorpotential  $V^{(p)}$  allein dem aufgeprägten elektrischen Ständerfeld die Waage hält, muß das genetisch dem Potentiale  $V_I^{(s)}$  verbundene elektrische Sekundärfeld längs der Ständerwicklung identisch verschwinden. Dieser „Kurzschlußbedingung“ genügen wir gewiß durch das Partikularintegral

$$V_{z,I}^{(s)} = \frac{E_0}{\omega \cosh \frac{\pi}{\tau} \delta} \left[ \sigma_I(t) \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{\tau} x \right) + \gamma_I(t) \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{\tau} x \right) \right] \sinh \frac{\pi}{\tau} y, \quad (54)$$



der LAPLACESchen Gleichung (33), in welchem die lediglich von der laufenden Zeit  $t$  abhängigen, dimensionsfreien Funktionen  $\sigma(t)$  und  $\gamma(t)$  je eine vorerst noch unbekannte Amplitudenmodulation der beziehentlich mit  $\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{\tau} x\right)$  und  $\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{\tau} x\right)$  proportionalen Wanderfelder der einheitlichen Phasengeschwindigkeit  $v_{ph}$  schildern. Um diese Funktionen zu bestimmen, transformieren wir das Potential (54) entsprechend (23) auf das läufergebundene Bezugssystem

$$V'_{z,1}(s) = \frac{E_0}{\omega \cosh \frac{\pi}{\tau} \delta} \left[ \sigma_1(t) \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{\tau} \{x' + \Delta x\}\right) + \gamma_1(t) \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{\tau} \{x' + \Delta x\}\right) \right] \sinh \frac{\pi}{\tau} y', \quad (55)$$

durch  $\dot{\sigma}$  und  $\dot{\gamma}$  beziehentlich die Ableitungen der Funktionen  $\sigma$  und  $\gamma$  nach  $t$  bezeichnend, erhalten wir somit gemäß (31) für das im läufergebundenen Bezugssystem wirksame elektrische Sekundärfeld  $E'_{z,1}(s)$  die Angabe

$$E'_{z,1}(s) = \frac{E_0}{\cosh \frac{\pi}{\tau} \delta} \left[ \left( \gamma_1 \cdot s - \frac{\dot{\sigma}_1}{\omega} \right) \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{\tau} \{x' + \Delta x\}\right) - \left( \sigma_1 \cdot s + \frac{\dot{\gamma}_1}{\omega} \right) \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{\tau} \{x' + \Delta x\}\right) \right] \sinh \frac{\pi}{\tau} y'. \quad (56)$$

Auf Grund der Gl. (52) resultiert also längs des läuferfesten Flächenleiters [ $y' = (-\delta)$ ] das elektrische Feld

$$[E'_{z,1}, l]_{y'=(-\delta)} = \frac{E_0}{\cosh \frac{\pi}{\tau} \delta} \left[ \left( s - \left( \gamma_1 s - \frac{\dot{\sigma}_1}{\omega} \right) \sinh \frac{\pi}{\tau} \delta \right) \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{\tau} \{x' + \Delta x\}\right) + \left( \sigma_1 s + \frac{\dot{\gamma}_1}{\omega} \right) \sinh \frac{\pi}{\tau} \delta \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{\tau} \{x' + \Delta x\}\right) \right]. \quad (57)$$

Da nun der Läuferstrombelag  $A'$  des primären Vektorpotentials definitionsgemäß verschwindet, finden wir dessen Komponente  $A'_I$  gemäß (29) und (55) zu

$$A'_I = -\frac{E_0}{\omega H_0} \cdot \frac{\pi}{\tau} \left[ \sigma_1 \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{\tau} \{x' + \Delta x\}\right) + \gamma_1 \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{\tau} \{x' + \Delta x\}\right) \right]. \quad (58)$$

Das OHMSche Gesetz

$$[E'_{z,1}, l]_{y'=(-\delta)} = \varrho A'_I, \quad (59)$$

zieht somit die Differentialgleichungen

$$s - \left( \gamma_1 s - \frac{\dot{\sigma}_1}{\omega} \right) \sinh \frac{\pi}{\tau} \delta = - \left[ \frac{\varrho}{\omega H_0} \frac{\pi}{\tau} \cosh \frac{\pi}{\tau} \delta \right] \cdot \sigma_1 \quad (60)$$

und

$$\left( \sigma_1 s + \frac{\dot{\gamma}_1}{\omega} \right) \sinh \frac{\pi}{\tau} \delta = - \left[ \frac{\varrho}{\omega H_0} \frac{\pi}{\tau} \cosh \frac{\pi}{\tau} \delta \right] \cdot \gamma_1, \quad (61)$$

für die Funktionen  $\sigma_1(t)$  und  $\gamma_1(t)$  nach sich. Führen wir in ihnen abkürzend die Zeitkonstante

$$T = \frac{H_0 \frac{\pi}{\tau} \operatorname{tgh} \frac{\pi}{\tau} \delta}{\varrho} \quad (62)$$

ein, so nehmen diese Differentialgleichungen die übersichtliche Gestalt

$$\dot{\sigma}_1 + \frac{\sigma_1}{T} - \gamma_1 \omega s = - \frac{\omega s}{\sinh \frac{\pi}{\tau} \delta} \quad (63)$$

und

$$\sigma_1 \omega s + \dot{\gamma}_1 + \frac{\gamma_1}{T} = 0 \quad (64)$$



an; die komplexe Veränderliche

$$\eta_I = \sigma_I + i \gamma_I \quad (65)$$

gehört daher der linearen Differentialgleichung

$$\dot{\eta}_I + \eta_I \left( \frac{1}{T} + i \omega s \right) = - \frac{\omega s}{\sinh \frac{\pi}{\tau} \delta}. \quad (66)$$

Nach Wahl der vorerst willkürlichen, komplexen Integrationskonstanten

$$\eta_{I,0} = \sigma_{I,0} + i \gamma_{I,0}, \quad (67)$$

lautet die Lösung dieser Differentialgleichung

$$\eta_I = \frac{e^{-\left[\frac{t}{T} + i \omega \left\{t - \frac{\Delta x}{v_{ph}}\right\}\right]}}{\sinh \frac{\pi}{\tau} \delta} \left[ \eta_{I,0} - \omega \int_0^t s(\bar{t}) e^{\frac{\bar{t}}{T} + i \omega \left\{\bar{t} - \frac{\Delta x}{v_{ph}}\right\}} d\bar{t} \right]. \quad (68)$$

Durch Trennung ihrer reellen von ihrer imaginären Komponente finden wir also

$$\begin{aligned} \sigma_I = \frac{e^{-\frac{t}{T}}}{\sinh \frac{\pi}{\tau} \delta} & \left[ \left( \sigma_{I,0} - \omega \int_0^t s(\bar{t}) e^{\frac{\bar{t}}{T}} \cos \omega \left\{ \bar{t} - \frac{\Delta x}{v_{ph}} \right\} d\bar{t} \right) \cos \omega \left( t - \frac{\Delta x}{v_{ph}} \right) \right. \\ & \left. + \left( \gamma_{I,0} - \omega \int_0^t s(\bar{t}) e^{\frac{\bar{t}}{T}} \sin \omega \left\{ \bar{t} - \frac{\Delta x}{v_{ph}} \right\} d\bar{t} \right) \sin \omega \left( t - \frac{\Delta x}{v_{ph}} \right) \right] \end{aligned} \quad (69)$$

und

$$\begin{aligned} \gamma_I = \frac{e^{-\frac{t}{T}}}{\sinh \frac{\pi}{\tau} \delta} & \left[ \left( \gamma_{I,0} - \omega \int_0^t s(\bar{t}) e^{\frac{\bar{t}}{T}} \sin \omega \left\{ \bar{t} - \frac{\Delta x}{v_{ph}} \right\} d\bar{t} \right) \cos \omega \left( t - \frac{\Delta x}{v_{ph}} \right) \right. \\ & \left. - \left( \sigma_{I,0} - \omega \int_0^t s(\bar{t}) e^{\frac{\bar{t}}{T}} \cos \omega \left\{ \bar{t} - \frac{\Delta x}{v_{ph}} \right\} d\bar{t} \right) \sin \omega \left( t - \frac{\Delta x}{v_{ph}} \right) \right], \end{aligned} \quad (70)$$

sodaß wir die Funktionen  $\sigma(t)$  und  $\gamma(t)$  weiterhin prinzipiell als bekannt ansehen dürfen. Zu Gl. (54) zurückkehrend, können wir somit gemäß (28) den sekundären Ständer-Strombelag  $A_I^{(s)}$  angeben:

$$A_I^{(s)} = \frac{E_0}{\omega \Pi_0 \cosh \frac{\pi}{\tau} \delta} \cdot \frac{\pi}{\tau} \left[ \sigma_I(t) \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{\tau} x \right) + \gamma_I(t) \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{\tau} x \right) \right]. \quad (71)$$

#### 4.2. Das dem zeitfreien Ständerstrombelag zugeordnete Sekundärfeld $V_{z,II}^{(s)}$

Nach Wahl der zeitabhängigen Amplitudenfunktionen  $\sigma_{II}(t)$  und  $\gamma_{II}(t)$  genügt das Partikularintegral

$$V_{z,II}^{(s)} = - \frac{E_0}{\omega \cosh \frac{\pi}{\tau} \delta} \left[ \sigma_{II} \sin \frac{\pi}{\tau} x + \gamma_{II} \cos \frac{\pi}{\tau} x \right] \sinh \frac{\pi}{\tau} y, \quad (72)$$

der LAPLACESchen Gleichung (33) unter der Bedingung identisch verschwindenden elektrischen Feldes an der aktiven Ständeroberfläche. Aus seiner gemäß (23) auf das läufergebundene Bezugssystem transformierten Darstellung

$$V_{z',II}^{(s)} = - \frac{E_0}{\omega \cosh \frac{\pi}{\tau} \delta} \left[ \sigma_{II} \sin \frac{\pi}{\tau} (x' + \Delta x) + \gamma_{II} \cos \frac{\pi}{\tau} (x' + \Delta x) \right] \sinh \frac{\pi}{\tau} y', \quad (73)$$



ergibt sich gemäß (31) das im genannten Bezugssystem durch  $V_{z, \text{II}}^{(s)}$  induzierte elektrische Feld:

$$E_{z, \text{II}}^{(s)} = - \frac{E_0}{\cosh \frac{\pi}{\tau} \delta} \left[ \left( \gamma_{\text{II}}(1-s) - \frac{\dot{\sigma}_{\text{II}}}{\omega} \right) \sin \frac{\pi}{\tau} (x' + \Delta x) - \left( \sigma_{\text{II}}(1-s) + \frac{\dot{\gamma}_{\text{II}}}{\omega} \right) \cos \frac{\pi}{\tau} (x' + \Delta x) \right] \sinh \frac{\pi}{\tau} y', \quad (74)$$

wobei  $\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt}$  und  $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt}$  gesetzt wurde. Im Verein mit (53) findet sich somit an der aktiven Läuferoberfläche  $y' = (-\delta)$  das elektrische Feld

$$[E_{z', \text{II}}]_{y'=(-\delta)} = - \frac{E_0}{\cosh \frac{\pi}{\tau} \delta} \left[ \left\{ (1-s) - \left( \gamma_{\text{II}}(1-s) - \frac{\dot{\sigma}_{\text{II}}}{\omega} \right) \sinh \frac{\pi}{\tau} \delta \right\} \sin \frac{\pi}{\tau} (x' + \Delta x) + \left( \sigma_{\text{II}}(1-s) + \frac{\dot{\gamma}_{\text{II}}}{\omega} \right) \sinh \frac{\pi}{\tau} \delta \cos \frac{\pi}{\tau} (x' + \Delta x) \right] \quad (75)$$

und ebendort resultiert gemäß (29) und (73) der Strombelag

$$A'_{\text{II}} = \frac{E_0}{\omega H_0} \frac{\pi}{\tau} \left[ \sigma_{\text{II}} \sin \frac{\pi}{\tau} (x' + \Delta x) + \gamma_{\text{II}} \cos \frac{\pi}{\tau} (x' + \Delta x) \right]. \quad (76)$$

Das Ohmsche Gesetz

$$[E_{z', \text{II}}]_{y'=(-\delta)} = \varrho A'_{\text{II}}, \quad (77)$$

führt daher auf die Differentialgleichungen

$$(1-s) - \left( \gamma_{\text{II}}(1-s) - \frac{\dot{\sigma}_{\text{II}}}{\omega} \right) \sinh \frac{\pi}{\tau} \delta = - \left[ \frac{\varrho}{\omega H_0} \cdot \frac{\pi}{\tau} \cosh \frac{\pi}{\tau} \delta \right] \sigma_{\text{II}} \quad (78)$$

und

$$- \left( \sigma_{\text{II}}(1-s) + \frac{\dot{\gamma}_{\text{II}}}{\omega} \right) \sinh \frac{\pi}{\tau} \delta = + \left[ \frac{\varrho}{\omega H_0} \cdot \cosh \frac{\pi}{\tau} \delta \right] \gamma_{\text{II}}, \quad (79)$$

welche sich nach Einführung der durch (62) definierten Zeitkonstanten  $T$  beziehentlich in

$$\dot{\sigma}_{\text{II}} + \frac{\sigma_{\text{II}}}{T} - \gamma_{\text{II}} \omega (1-s) = - \frac{\omega (1-s)}{\sinh \frac{\pi}{\tau} \delta} \quad (80)$$

und

$$\sigma_{\text{II}} \omega (1-s) + \dot{\gamma} + \frac{\gamma_{\text{II}}}{T} = 0 \quad (81)$$

umschreiben lassen. Für die komplexe Veränderliche

$$\eta_{\text{II}} = \sigma_{\text{II}} + i \gamma_{\text{II}}, \quad (82)$$

resultiert aus (80) und (81) die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\dot{\eta}_{\text{II}} + \eta_{\text{II}} \left( \frac{1}{T} + i \omega (1-s) \right) = - \frac{\omega (1-s)}{\sinh \frac{\pi}{\tau} \delta}. \quad (83)$$

Mit Hilfe der komplexen Integrationskonstanten

$$\eta_{\text{II}, 0} = \sigma_{\text{II}, 0} + i \gamma_{\text{II}, 0}, \quad (84)$$

lautet die Lösung dieser Gleichung

$$\eta_{\text{II}} = \frac{e^{-\left[ \frac{t}{T} + i \omega \frac{\Delta x}{v_{ph}} \right]}}{\sinh \frac{\pi}{\tau} \delta} \left[ \eta_{\text{II}, 0} - \omega \int_0^t (1-s(\bar{t})) e^{\frac{\bar{t}}{T} + i \omega \frac{\Delta x}{v_{ph}}} d\bar{t} \right]. \quad (85)$$



Man entnimmt ihr durch Trennung des Reellen vom Imaginären die Angaben

$$\sigma_{II} = \frac{e^{-\frac{t}{T}}}{\sinh \frac{\pi}{\tau} \delta} \left[ \left( \sigma_{II,0} - \omega \int_0^t (1-s) e^{\frac{\bar{t}}{T}} \cos \omega \frac{\Delta x}{v_{ph}} \cdot d\bar{t} \right) \cdot \cos \omega \frac{\Delta x}{v_{ph}} + \left( \gamma_{II,0} - \omega \int_0^t (1-s) e^{\frac{\bar{t}}{T}} \sin \omega \frac{\Delta x}{v_{ph}} d\bar{t} \right) \sin \omega \frac{\Delta x}{v_{ph}} \right] \quad (86)$$

und

$$\gamma_{II} = \frac{e^{-\frac{t}{T}}}{\sinh \frac{\pi}{\tau} \delta} \left[ \left( \gamma_{II,0} - \omega \int_0^t (1-s) e^{\frac{\bar{t}}{T}} \sin \omega \frac{\Delta x}{v_{ph}} d\bar{t} \right) \cos \omega \frac{\Delta x}{v_{ph}} - \left( \sigma_{II,0} - \omega \int_0^t (1-s) e^{\frac{\bar{t}}{T}} \cos \omega \frac{\Delta x}{v_{ph}} d\bar{t} \right) \sin \omega \frac{\Delta x}{v_{ph}} \right], \quad (87)$$

sodaß die Funktionen  $\sigma_{II}(t)$  und  $\gamma_{II}(t)$  fortan als bekannt gelten dürfen. Insbesondere folgt aus (28) und (72) der dem zeitfreien, primären Ständerstrombelag zugeordnete sekundäre Ständerstrombelag zu

$$A_{II}^{(s)} = - \frac{E_0}{\omega H_0 \cosh \frac{\pi}{\tau} \delta} \cdot \frac{\pi}{\tau} \left[ \sigma_{II} \sin \frac{\pi}{\tau} x + \gamma_{II} \cos \frac{\pi}{\tau} x \right]. \quad (88)$$

Durch Summation der Gln. (42), (71) und (88) finden wir also mit Rücksicht auf (44) den resultierenden Ständerstrombelag zu

$$A = \frac{E_0}{\omega H_0 \cosh \frac{\pi}{\tau} \delta} \cdot \frac{\pi}{\tau} \left[ \sigma_I \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{\tau} x \right) + \left( \sinh \frac{\pi}{\tau} \delta + \gamma_I \right) \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{\tau} x \right) - \sigma_{II} \sin \frac{\pi}{\tau} x - \left( \sinh \frac{\pi}{\tau} \delta + \gamma_{II} \right) \cos \frac{\pi}{\tau} x \right]. \quad (89)$$

Wir vervollständigen nun die Anfangsbedingung (43) durch die Forderung

$$A = 0 \quad \text{für } t = 0. \quad (90)$$

Sie wird gemäß (89) erfüllt, falls wir die Integrationskonstanten  $\eta_{I,0}$  und  $\eta_{II,0}$  je gleich Null setzen, sodaß die Funktionen  $\sigma_I$ ;  $\gamma_I$ ;  $\sigma_{II}$  und  $\gamma_{II}$  sämtlich im Einschaltaugenblick verschwinden:

$$\sigma_I(0) = 0; \quad \gamma_I(0) = 0; \quad \sigma_{II}(0) = 0; \quad \gamma_{II}(0) = 0. \quad (91)$$

Im Lichte der Gln. (58) und (76) annulliert sich dann im nämlichen Zeitpunkt auch der Läuferstrombelag:

$$A' = 0 \quad \text{für } t = 0. \quad (92)$$

Aus der Kenntnis des Ständerstrombelages (89) im Verein mit der Angabe (37) des ausgeprägten elektrischen Ständerfeldes ergibt sich mittels des POYNTINGschen Vektors die je Einheit der aktiven Ständeroberfläche in den Luftspalt entsandte elektromagnetische Strahlung

$$S = - [E_x]_{y=0} \cdot A. \quad (93)$$

Je Einheit seiner Wellenlänge [Polpaar] gibt somit der Ständer unseres Maschinenmodelles die Leistung

$$P = l \int_0^{2\tau} S dx = \frac{E_0^2 \pi l}{\omega H_0 \cosh \frac{\pi}{\tau} \delta} [-\sigma_I(t) t + \{\sigma_{II}(t) \cos \omega t + \gamma_{II}(t) \sin \omega t\}], \quad (94)$$

an den Luftspalt ab. Der Deutlichkeit halber sei nochmals betont, daß die beziehentlich mit  $\sigma_{II}$  und  $\gamma_{II}$  verhältnismäßigen Posten dieser Leistung nach Maßgabe des hier bewußt vernachlässigten Ständerwiderstandes tatsächlich mit wachsender Zeit verlöschen, so daß dann wesentlich nur der zu  $\sigma_I$  proportionale Posten verbleibt; insbesondere ist diese Bemerkung bei der Diskussion des stationären Zustandes zu beachten.

### 5. Sonderfälle

Obwohl wir im vorstehenden die gestellte Aufgabe in allgemeiner Form gelöst haben, bereitet doch die analytische Berechnung der Integrale (69), (70) und (86), (87) häufig nicht unerhebliche Schwierigkeiten. Es erscheint deshalb angezeigt, einige Fälle von besonderer praktischer Bedeutung explizit zu behandeln; hierbei werden wir uns der Kürze halber auf die wanderfeldgebundenen Funktionen  $\sigma_I(t)$  und  $\gamma_I(t)$  beschränken, während wir die Übertragung wesentlich der gleichen Überlegungen auf die weniger wichtigen Funktionen  $\sigma_{II}(t)$  und  $\gamma_{II}(t)$  dem Leser überlassen.

#### 5.1. Gleichförmige Läuferbewegung

Sei

$$s = s_0 = \text{const} \quad (95)$$

vorausgesetzt, so haben wir es nach (66) mit der Differentialgleichung

$$\dot{\eta}_I + \eta_I \left( \frac{1}{T} + i \omega s_0 \right) = - \frac{\omega s_0}{\sinh \frac{\pi}{\tau} \delta} \quad (96)$$

zu tun, welche durch

$$\bar{\eta}_I = - \frac{1}{\sinh \frac{\pi}{\tau} \delta} \frac{\omega s_0 T}{1 + i \omega s_0 T} \quad (97)$$

partikulär integriert wird; nach Trennung des Reellen vom Imaginären folgen somit die stationären Angaben

$$\bar{\sigma}_I = - \frac{1}{\sinh \frac{\pi}{\tau} \delta} \frac{\omega s_0 T}{1 + (\omega s_0 T)^2}; \quad \bar{\gamma}_I = \frac{1}{\sinh \frac{\pi}{\tau} \delta} \frac{(\omega s_0 T)^2}{1 + (\omega s_0 T)^2}, \quad (98)$$

deren erste im Verein mit (94) die wohlbekannte Abhängigkeit der am Läufer der Induktionsmaschine angreifenden Schubkraft von der Schlüpfung enthält.

Zu (97) das Integral

$$\Delta \bar{\eta}_I = \eta_{I,0} e^{-\left(\frac{1}{T} + i \omega s_0\right)t} \quad (99)$$

hinzufügend, genügen wir nun der Anfangsbedingung (91) durch die Wahl

$$\eta_{I,0} = -\eta_I, \quad (100)$$

so daß

$$\eta_I = \bar{\eta} + \Delta \bar{\eta}_I = - \frac{1}{\sinh \frac{\pi}{\tau} \delta} \frac{\omega s_0 T}{1 + i \omega s_0 T} \left[ 1 - e^{-\left(\frac{1}{T} + i \omega s_0\right)t} \right], \quad (101)$$

die gesuchte Lösung der inhomogenen Gl. (97) angibt; sie enthält die Aussagen

$$\sigma_I = \bar{\sigma}_I \left| 1 - e^{-\frac{t}{T}} (\cos \omega s_0 t - \omega s_0 T \sin \omega s_0 t) \right| \quad (102)$$

und

$$\gamma_I = \bar{\gamma}_I \left[ 1 - e^{-\frac{t}{T}} \left( \cos \omega s_0 t + \frac{1}{\omega s_0 T} \sin \omega s_0 t \right) \right], \quad (103)$$



welche durch Bild 2 veranschaulicht werden. Wählt man insbesondere  $s_0 = 1$  [Stillstand des Läufers], so annullieren sich gemäß (86), (87) und (91) die Funktionen  $\sigma_{II}(t)$  und  $\gamma_{II}(t)$ , sodaß dann entsprechend (94) die aus (98) und (102) zu entnehmende Funktion

$$\lim_{s_0 \rightarrow 1} \sigma_I = - \frac{1}{\sinh \frac{\pi}{\tau} \delta} \cdot \frac{\omega T}{1 + (\omega T)^2} \left[ 1 - e^{-\frac{t}{T}} (\cos \omega t - \omega T \sin \omega t) \right], \quad (104)$$

für die am Läufer angreifende Anlauf-Schubkraft verantwortlich ist.

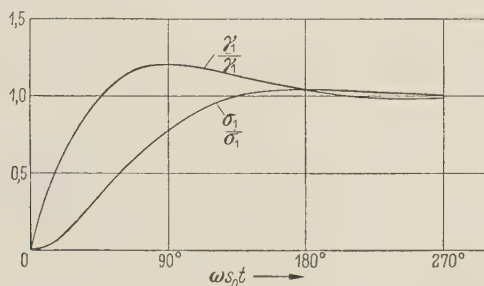


Bild 2. Die Funktionen  $\sigma_I$  und  $\gamma_I$  bei gleichförmiger Läuferbewegung;  $\omega s_0 T = 1$ . Die Bezeichnungen der beiden Kurven sind gegeneinander auszutauschen.

## 5.2. Schwache Störungen der gleichförmigen Läuferbewegung

Ausgehend von der gleichförmigen Bewegung (95) des Läufers und den nach (98) bestimmten stationären Amplituden  $\bar{\sigma}_I$  und  $\bar{\gamma}_I$  untersuchen wir im folgenden den fast stationären Lauf

$$s = s_0 + \Delta s; \quad |\Delta s| \ll |s_0| \quad (105)$$

der Maschine, so daß die Amplituden  $\sigma_I$  und  $\gamma_I$  durch

$$\sigma = \bar{\sigma}_I + \Delta \sigma_I; \quad |\Delta \sigma_I| \ll |\bar{\sigma}_I| \quad (106)$$

und

$$\gamma = \bar{\gamma}_I + \Delta \gamma_I; \quad |\Delta \gamma_I| \ll |\bar{\gamma}_I|, \quad (107)$$

beschrieben werden können. Für die komplexe Störung

$$\Delta \eta_I = \Delta \sigma_I + i \Delta \gamma_I, \quad (108)$$

der in (97) angegebenen Amplitude  $\bar{\eta}_I$  entsteht somit, unter Vernachlässigung kleiner Glieder zweiter Ordnung, aus (66) und (97) die Differentialgleichung

$$\Delta \dot{\eta}_I + \Delta \eta_I \left( \frac{1}{T} + i \omega s_0 \right) = - \frac{1}{\sinh \frac{\pi}{\tau} \delta} \cdot \frac{\omega \Delta s}{1 + i \omega s_0 T}. \quad (109)$$

Folgende Unterfälle seien hervorgehoben:

### a) Instantane Änderung der Läufergeschwindigkeit

Es sei

$$\Delta s = \begin{cases} 0; & t < 0 \\ \Delta s_0; & t > 0 \end{cases} \quad (110)$$

Die entsprechende Lösung der Gl. (109) lautet

$$\Delta \eta_I = - \frac{1}{\sinh \frac{\pi}{\tau} \delta} \cdot \frac{\omega \cdot \Delta s_0 \cdot T}{(1 + i \omega s_0 T)^2} \left[ 1 - e^{-i \left( \frac{1}{T} + i \omega s_0 \right) t} \right]. \quad (111)$$

Man entnimmt ihr die Angaben

$$\Delta\sigma_I = -\frac{1}{\sinh \frac{\pi}{\tau} \delta} \cdot \frac{\omega \Delta s_0 T}{[1 + (\omega s_0 T)^2]^2} \cdot \left[ \{1 - (\omega s_0 T)^2\} \left\{1 - e^{-\frac{t}{T}} \cos \omega s_0 t\right\} - e^{-\frac{t}{T}} \cdot 2 \omega s_0 T \sin \omega s_0 t \right] \quad (112)$$

und

$$\Delta\gamma_I = \frac{1}{\sinh \frac{\pi}{\tau} \delta} \cdot \frac{\omega \Delta s_0 \cdot T}{[1 + (\omega s_0 T)^2]^2} \cdot \left[ \{1 - (\omega s_0 T)^2\} e^{-\frac{t}{T}} \sin \omega s_0 t + 2 \omega s_0 T \left\{1 - e^{-\frac{t}{T}} \cos \omega s_0 t\right\} \right], \quad (113)$$

welche durch Bild 3a, 3b und 3c veranschaulicht werden.

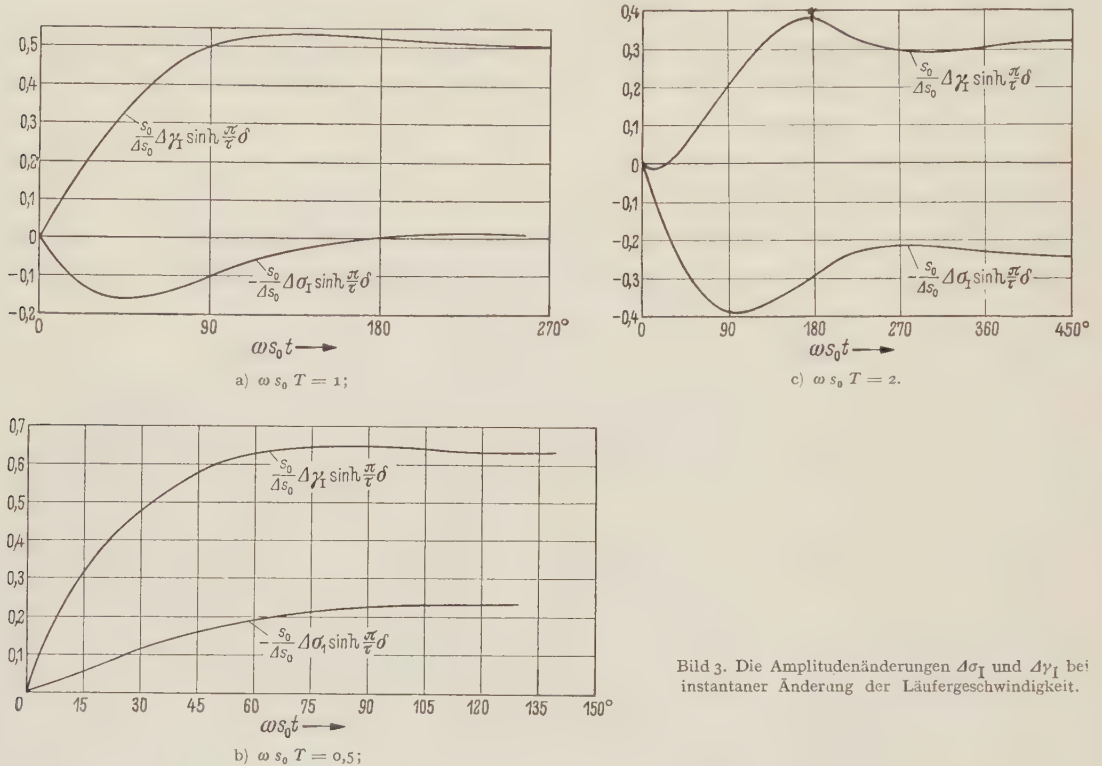


Bild 3. Die Amplitudenänderungen  $\Delta\sigma_I$  und  $\Delta\gamma_I$  bei instantaner Änderung der Läufergeschwindigkeit.

### b) Harmonische Läuferpendelungen

Die kinematische „Feinstruktur“ der mehrphasigen Induktionsmaschinen offenbart häufig mechanische Schwingungen der Kreisfrequenz  $\Omega$ , welche mit der maximalen Schlupfswankung  $\Delta s_{max}$  dem gleichförmigen Lauf der Maschine überlagert sind. Nach passender Verfügung über den Ursprung der laufenden Zeit  $t$  kann der genannte Vorgang durch

$$\Delta s = \Delta s_{max} \cdot \cos \Omega t = \frac{\Delta s_{max}}{2} [e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}] \quad (114)$$

analytisch beschrieben werden. Beschränken wir uns der Kürze halber auf den quasistationären Zustand, so lautet die der Störung (114) entsprechende Lösung der Differentialgleichung (109)

$$\begin{aligned} \Delta\eta_I &= -\frac{1}{2 \sinh \frac{\pi}{\tau} \delta} \cdot \frac{\omega \cdot \Delta s_{max}}{1 + i \omega s_0 T} \left[ \frac{e^{i\Omega t}}{T + i \{\omega s_0 + \Omega\}} + \frac{e^{-i\Omega t}}{\frac{1}{T} + i \{\omega s_0 - \Omega\}} \right] \\ &= -\frac{1}{\sinh \frac{\pi}{\tau} \delta} \cdot \frac{\omega T \cdot \Delta s_{max}}{1 + i \omega s_0 T} \frac{(1 + i \omega s_0 T) \cos \Omega t + \Omega T \sin \Omega t}{1 + (\Omega^2 - \omega^2 s_0^2) T^2 + i 2 \omega s_0 T}. \end{aligned} \quad (115)$$



Sie vereinfacht sich unter der „Resonanz“-bedingung

$$\Omega = \omega s_0, \quad (116)$$

$$\Delta\eta_I = -\frac{\Delta s_{max}}{s_0} \cdot \frac{1}{\sinh \frac{\pi}{\tau} \delta} \cdot \frac{\Omega T}{1 + i \Omega T} \cdot \frac{(1 + i \Omega T) \cos \Omega t + \Omega T \sin \Omega t}{1 + 2 i \Omega T}, \quad (117)$$

so daß dann die Amplitudenstörungen durch

$$\Delta\sigma_I = -\frac{\Delta s_{max}}{s_0} \cdot \frac{1}{\sinh \frac{\pi}{\tau} \delta} \frac{\Omega T}{(1 + \Omega^2 T^2)(1 + 4 \Omega^2 T^2)} [(1 + \Omega^2 T^2) \cos \Omega t + \Omega T (1 - 2 \Omega^2 T^2) \sin \Omega t] \quad (118)$$

und

$$\Delta\gamma_I = \frac{\Delta s_{max}}{s_0} \cdot \frac{1}{\sinh \frac{\pi}{\tau} \delta} \frac{\Omega^2 T^2}{(1 + \Omega^2 T^2)(1 + 4 \Omega^2 T^2)} [2(1 + \Omega^2 T^2) \cos \Omega t + 3 \Omega T \sin \omega t] \quad (119)$$

dargestellt werden. Unter Berufung auf die früher entwickelte physikalische Bedeutung der Funktion  $\sigma$  erkennt man durch Vergleich der Aussage (118) mit dem Ansatz (114), daß die Ständerleistung ein der jeweiligen Schlupfstörung proportionales Glied enthält; man darf es als Anfachung der mechanischen Schlupfoscillationen deuten.

### 5.3. Erzwungener Schnellanlauf

Wir nehmen an, daß die Maschine mittels einer äußeren, am Läufer angreifenden Zwangskraft nach dem Gesetze

$$s = 1 \cdot e^{-\beta t}; \quad \beta > 0, \quad t \geq 0, \quad (120)$$

vom Stillstand aus beschleunigt wurde. Beachtet man die Definition

$$s = 1 - \frac{v(t)}{v_{ph}}, \quad (121)$$

des zeitabhängigen Schlupfes, so finden wir im Verein mit (120) durch Integration

$$\frac{\Delta x}{v_{ph}} = t - \frac{1}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) = t - \frac{1-s}{\beta}. \quad (122)$$

Zu (68) zurückkehrend, haben wir uns also mit dem Integral

$$J = \int_0^t s e^{\frac{i}{T} t} e^{i \omega \left\{ t - \frac{\Delta x}{v_{ph}} \right\}} dt = \frac{e^{i \frac{\omega}{\beta}}}{\beta} \int_s^1 (\bar{s})^{-\frac{1}{\beta T}} e^{-i \frac{\omega}{\beta} \bar{s}} d\bar{s} \quad (123)$$

zu beschäftigen. Setzen wir in ihm

$$\frac{\omega}{\beta} s = u; \quad s = \frac{\beta}{\omega} u, \quad (124)$$

so wird

$$J = \frac{e^{i \frac{\omega}{\beta}}}{\omega} \cdot \left( \frac{\beta}{\omega} \right)^{-\frac{1}{\beta T}} \int_{\frac{\omega}{\beta} s}^{\frac{\omega}{\beta}} \frac{e^{-i u}}{u^{\frac{1}{\beta T}}} du. \quad (125)$$

Durch Substitution dieses Ausdruckes in (68) finden wir, unter der Voraussetzung  $\eta_{I,0} = 0$ ,

$$\eta_I = -\frac{1}{\sinh \frac{\pi}{\tau} \delta} \left( \frac{\beta}{\omega s} \right)^{-\frac{1}{\beta T}} \cdot e^{i \frac{\omega}{\beta} s} \int_{\frac{\omega}{\beta} s}^{\frac{\omega}{\beta}} u^{-\frac{1}{\beta T}} e^{-i u} du. \quad (126)$$

Das in dieser Gleichung verbleibende, bestimmte Integral ist gewiß für jeden Wert des Produktes  $(\beta T)$  numerisch unschwer zu berechnen. Der Kürze halber wollen wir uns jedoch hier auf den Fall der „Abstimmung“

$$\beta T = 1 \quad (127)$$

zwischen der logarithmischen Läuferbeschleunigung  $\beta$  und der elektromagnetischen Zeitkonstanten  $T$  beschränken; im Lichte der technisch realisierbaren Werte dieser Zeitkonstanten kennzeichnet somit (127) den Schnellanlauf der Maschine. Mit Benutzung der wohlbekannten Zahlentafeln der Funktionen

$$\text{Ci}(u) = - \int_u^\infty \frac{\cos \bar{u}}{\bar{u}} d\bar{u} \quad (128)$$

und

$$\text{Si}(u) = \int_0^u \frac{\sin \bar{u}}{\bar{u}} d\bar{u}, \quad (129)$$

resultiert dann aus (126) die komplexe Darstellung

$$\begin{aligned} \eta_I = & - \frac{1}{\sinh \frac{\pi}{\tau} \delta} (\omega T s) [\cos \omega T s + i \sin \omega T s] \\ & \times [\text{Ci}(\omega T) - \text{Ci}(\omega T s) - i \{\text{Si}(\omega T) - \text{Si}(\omega T s)\}], \end{aligned} \quad (130)$$

welche durch Trennung des Reellen vom Imaginären die Aussagen

$$-\sigma_I \sinh \frac{\pi}{\tau} \delta = (\omega T s) [\cos \omega T s \{\text{Ci}(\omega T) - \text{Ci}(\omega T s)\} + \sin \omega T s \{\text{Si}(\omega T) - \text{Si}(\omega T s)\}] \quad (131)$$

und

$$-\gamma_I \sinh \frac{\pi}{\tau} \delta = (\omega T s) [\sin \omega T s \{\text{Ci}(\omega T) - \text{Ci}(\omega T s)\} - \cos \omega T s \{\text{Si}(\omega T) - \text{Si}(\omega T s)\}] \quad (132)$$

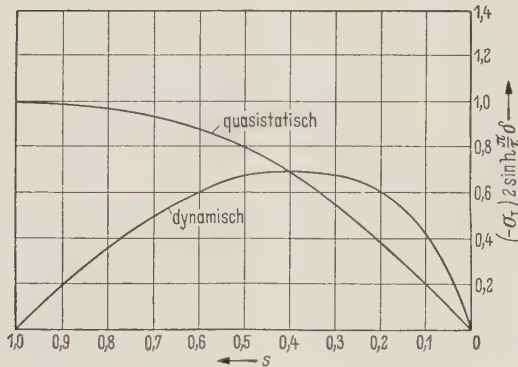


Bild 4a. Tangentialschub der schnellanlaufenden Maschine als Funktion der Schlüpfung.

$$\frac{1}{\omega T} = 1.$$

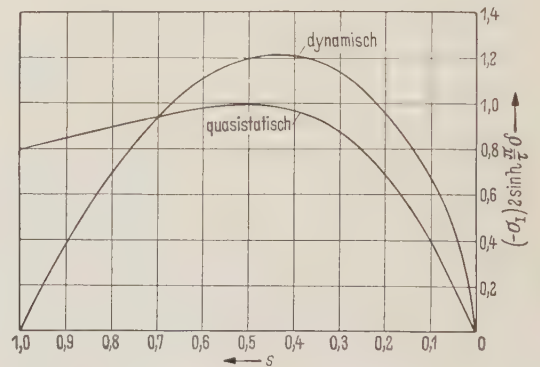


Bild 4b. Tangentialschub der schnellanlaufenden Maschine als Funktion der Schlüpfung.

$$\frac{1}{\omega T} = \frac{1}{2}.$$

nach sich zieht. Die Bilder 4a und 4b veranschaulichen den physikalischen Inhalt der Gl. (131), indem sie das dynamische Verhalten [Tangentialschub] der schnellanlaufenden Maschine deren quasistationärem Verhalten bei überaus langsamem Anlauf gegenüber stellt, und Bild 5 zeigt den nämlichen Vergleich unter Benutzung von (120) in Abhängigkeit von der dimensionsfreien Zeit  $(\beta t)$ . In den Bildern 6a und (6b) sind die Gln. (131) und (132) komplex



zusammengefaßt worden; die entsprechend (130) gezeichneten „Zeigerdiagramme“ sind als Ersatz des wohlbekannten HEYLANDkreises der im Ständer auftretenden, quasistationären Läuferreaktion auf den Fall des erzwungenen Schnellanlaufes zu deuten.

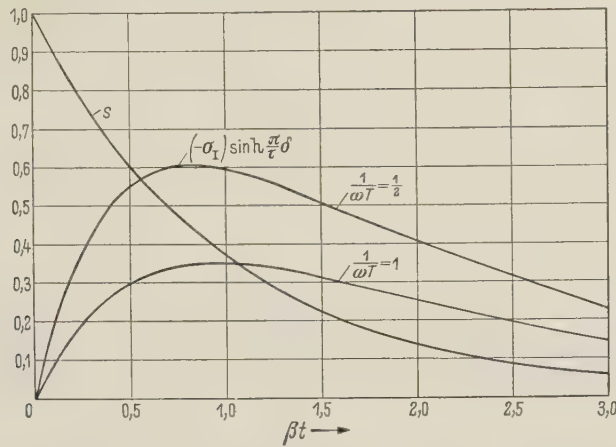


Bild 5. Tangentialschub der schnellanlaufenden Maschine als Funktion der [dimensionsfreien] Zeit.

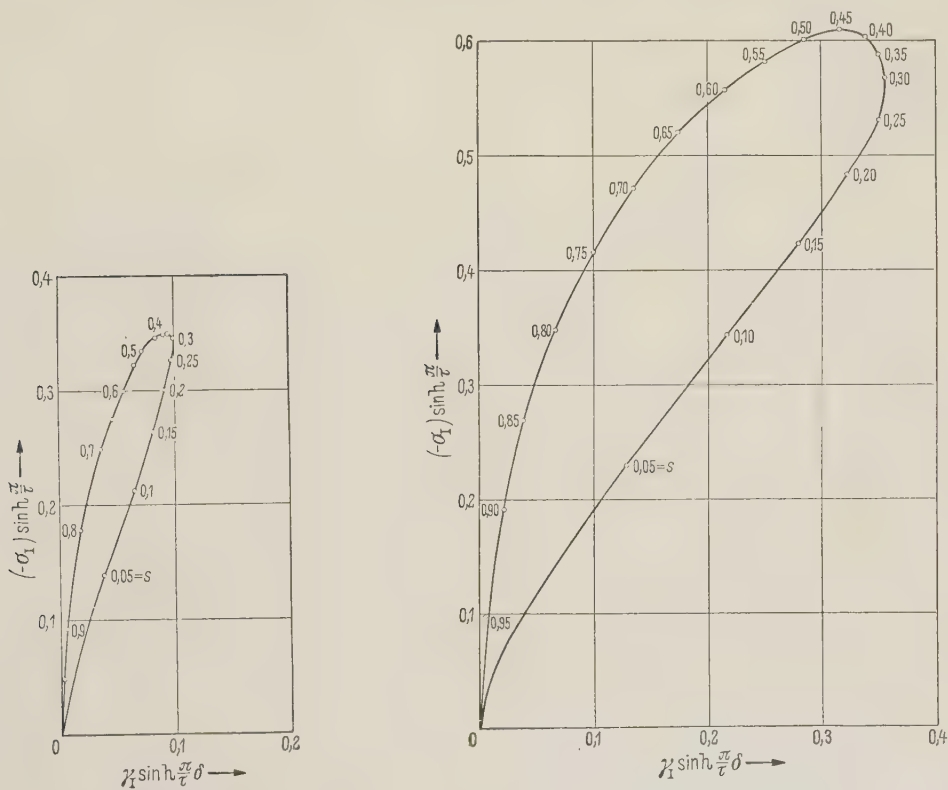


Bild 6a. Zeigerdiagramm der Läuferreaktion bei erzwungenem Schnellanlauf

$$\frac{1}{\omega T} = 1.$$

Bild 6b. Zeigerdiagramm der Läuferreaktion bei erzwungenem Schnellanlauf

$$\frac{1}{\omega T} = \frac{1}{2}.$$

## 6. Zusammenfassung

Bei den raschen Regelvorgängen neuzeitlicher Steuermaschinen sind mechanische und elektromagnetische Ausgleicherscheinungen untereinander genetisch gekoppelt, sodaß man sie bei ihrer theoretischen Untersuchung simultan zu behandeln hat. In der vorliegenden

Arbeit wird versucht, diese Aufgabe für mehrphasige Induktionsmaschinen zu lösen, deren Läufer eine kinematisch realisierbare, sonst aber beliebige Bewegung aufgezwungen wird. Zu diesem Zwecke wird die Maschine durch ein stark idealisiertes, planparalleles Modell ersetzt, welches der unmittelbaren Beschreibung durch die MAXWELLSchen Feldgleichungen zugänglich ist. Die gedankliche Verbindung zwischen den Vorgängen im Ständer des Maschinenmodelles und jenen ihres Läufers wird durch eine, allerdings nur approximativ gültige Verallgemeinerung der LORENTZ-Transformation auf relativ zu einander zwar geradlinig, doch ungleichförmig bewegte Bezugssysteme gewonnen. Unter den Komponenten des elektromagnetischen Viererpotentials bleiben auch bei dieser verallgemeinerten Transformation jene zwei Komponenten des magnetischen Vektorpotentials invariant, welche im dreidimensionalen Konfigurationsraum senkrecht zur Läuferbewegung weisen; und bereits eine dieser Komponenten kann, nach hinreichender Vereinfachung des Maschinenmodelles, als erzeugende Funktion des Gesamtfeldes benutzt werden, welche ihrerseits der LAPLACESchen Gleichung genügt. Um diese Gleichung zu integrieren, wird die genannte Komponente des Vektorpotentials in ein allein vom äußeren Netz diktiertes Primärpotential und ein die Läufer-Rückwirkung erfassendes Sekundärpotential zerlegt; das erstgenannte wird durch eine harmonische Wanderwelle dargestellt, während man die Läuferreaktion mittels vier amplitudenmodulierter Wellen zu beschreiben hat. Die an der aktiven Oberfläche des Läufers herrschenden Randbedingungen lassen sich befriedigen, falls man die vier zeitabhängigen Amplituden jener Wellen zwei Paaren linearer, simultaner Differentialgleichungen erster Ordnung unterwirft, deren Koeffizienten von der jeweils aufgezwungenen Läuferbewegung bestimmt wurden. Nach komplexer Zusammenfassung der kinematisch einander zugehörigen Amplituden reduziert sich jedes jener Gleichungspaare auf eine zwar abermals lineare Differentialgleichung, deren Koeffizienten jedoch komplexe Funktionen der laufenden Zeit definieren; die Integration gelingt auf elementarem Wege. Die allgemeine Lösung wird an einer Reihe von Sonderfällen explizit durchgeführt: An der gleichförmigen Läuferbewegung, an schwachen Störungen der gleichförmigen Läuferbewegung, und am erzwungenen Schnellanlauf der Maschine; die Ergebnisse der Rechnung werden graphisch veranschaulicht.

FRANZ OLLENDORFF Haifa-Technion City [Israel] El. Eng. Building



# Allgemeine Theorie der Synchron- und Asynchronmaschinen in der Operator-Matrix-Darstellung

Von

M. CANAY, Baden (Schweiz)

Mit 6 Textabbildungen

(Eingegangen am 24. August 1960)

**Inhaltsübersicht:** 1. Einleitung — 2. Allgemeines über die Rechnungsart und die Voraussetzungen — 3. Grundgleichungen der beiden Achsen — 4. Ersatzschemata der  $d$ - und  $q$ -Achsen — 5. Allgemeiner Zusammenhang zwischen den Achsengrößen im Bildbereich der LAPLACE-Transformation — 6. Zusammenhang zwischen den Strom-Spannungssystemen im Bildbereich der LAPLACE-Transformation (Admittanz-Operator-Matrizen im Bildbereich) — 7. Zusammenhang zwischen den Strom- und Spannungssystemen im Originalbereich der LAPLACE-Transformation (Admittanz-Operator-Matrizen im Originalbereich) — 8. Drehmoment — 9. Beispiele: 9.1. Stationärer Synchronbetrieb am symmetrischen Netz; 9.2. Stationärer Asynchronbetrieb am symmetrischen Netz; 9.3. Dreisträngiger Kurzschluß anschließend an stationäre Belastung; 9.4. Drehmoment einer Synchronmaschine bei plötzlicher Änderung der Spannung — 10. Zusammenfassung — Anhang I — Anhang II — Literatur.

## Zusammenstellung der benutzten Bezeichnungen

Die Symbole, welche eine Dimension besitzen, wurden mit ihren Dimensionen angegeben, die anderen bedeuten dimensionslose Per-Unit-Größen.

### Buchstaben:

$e$	Rotations E. M. K., Basis der natürlichen Logarithmen
$f$	Nennfrequenz in Hz
$I$	Strom, Bezugsgröße in A
$\vec{I}$	Betrag des Stromvektors
$\vec{I}$	Stromvektor in Form $\vec{I} = I \cdot e^{j\varphi}$
$\vec{I}(\vec{t})$	Phasenstrom in komplexer Form der Wechselgrößen $\vec{I} = \sum_{\alpha=1}^n \vec{I}_{\alpha} \cdot e^{j\nu_{\alpha}t}$ (bzw. im Bildbereich)
$i(\vec{t})$	Momentanwert des Stroms $i = \text{Re} [\vec{I}]$
$j$	Imaginäre Einheit
$L$	Induktivitäten in Vs/A $L_{dd}, L_{DD}, L_{QQ}, L_{qq}, L_{ff}$ Auf 3 phasiges System bezogene Induktivitäten der Ersatzwicklungen $L_{dD}, L_{Df}, L_{df}, L_{qQ}$ Auf 3 phasiges System bezogene Gegeninduktivitäten $L_f$ Eigene Induktivität der Feldwicklung
$M_d$	Drehmoment
$P$	Scheinleistung in kVA
$p$	Unabhängige Variable im Bildbereich der LAPLACE-Transformation
$R$	Ohmscher Widerstand (ohne Index für Stator)
$s(s')$	Schlupf für das Mitsystem (bzw. für das Gegensystem)
$T$	Zeitkonstante
$t$	Zeit
$U$	Verkettete Spannung in V
$\vec{U}$	Betrag des Spannungsvektors
$\vec{U}$	Spannungsvektor in Form $\vec{U} = U \cdot e^{j\theta}$

$\vec{U}(\vec{t})$  Spannungsvektor in komplexer Form der

Wechselgrößen  $\vec{U} = \sum_{\alpha=1}^n \vec{U}_{\alpha} \cdot e^{j\nu_{\alpha}t}$

$u(\vec{t})$  Momentanwert der Spannung

$u = \text{Re}[\vec{U}]$

$X$  Reaktanz, Induktivität

$Y$  Komponenten der Admittanz-Operator-Matrix

$Z$  Impedanz

### Griechische Buchstaben:

$\gamma$	Siehe Gl. (6.11)
$\Gamma$	Transformationsmatrix siehe Gl. (6.2)
$\delta$	Polradwinkel
$\Theta$	Winkel (allgemein)
$\mu$	Abschirmungskoeffizienten [4] $\mu_d = 1 - \frac{L_{df} \cdot L_{Dd}}{L_{fd} \cdot L_{dd}}, \quad \mu_D = 1 - \frac{L_{Df} \cdot L_{dD}}{L_{fd} \cdot L_{DD}},$ $\mu_f = 1 - \frac{L_{fd} \cdot L_{fD}}{L_{dD} \cdot L_{ff}},$
$\xi$	Ein Korrekturfaktor siehe Gl. (6.12)
$\sigma$	Streuungskoeffizienten $\sigma_{dD} = 1 - \frac{L_{dD}^2}{L_{dd} \cdot L_{DD}}, \quad \sigma_{fD} = 1 - \frac{L_{fD}^2}{L_{fd} \cdot L_{DD}},$ $\sigma_{df} = 1 - \frac{L_{df}^2}{L_{dd} \cdot L_{ff}},$
$\psi$	Flußverkettung (Momentanwert)
$\vec{\Psi}$	Flußverkettung in komplexer Form der Wechselgrößen

Indizes:	$R$ Reaktionsglieder
$B$ Bezugssystem, Bezugsgröße	Rot. Rotorsystem
$D$ Dämpferwicklung in der Längsachse	Andere Zeichen:
$d$ Zeichen der Längsachse	' Außer bei $s$ und $X$ stellt eine neue Per-Unit-Größe dar. Siehe Gl. (4.1 und 4.4). Bei $s$ bedeutet es den Schlupf für das Gegensystem
$f$ Zeichen der Größe der Feldwicklung	$  $ Abgekürzte Darstellung einer Matrix
$g$ Gegensystem	$\sim$ Zeichen der im Bildbereich der LAPLACE-Transformation definierten Größen
$m$ Mitsystem	$\rightarrow$ Übergang zwischen Bild- und Originalbereich
$n$ Nennwert	$\text{Im}$ Imaginärer Teil
$o$ Zeichen der Anfangswerte und Anfangsvektoren	$\text{Re}$ Reeller Teil
$Q$ Dämpferwicklung in der Querachse	$*$ Zeichen für die konjugierten Funktionen
Zeichen der Querachse	

## 1. Einleitung

Die allgemeine Theorie der Synchronmaschine wurde zuerst von R. H. PARK [1], [2] auf den sogenannten 6 PARKschen Gleichungen aufgebaut und zuletzt von CONCORDIA [3] und TH. LAIBLE [4] gesamthaft behandelt und mathematisch streng begründet. Obwohl diese Zwei-Achsen-Theorie von PARK nicht nur die Synchronmaschine, sondern auch die Asynchronmaschine erfassen darf, wurde es lange vorgezogen, die Asynchronmaschine in ihrer üblichen Theorie zu untersuchen. Dies besonders deshalb, weil die Asynchronmaschine normalerweise keine zwei verschiedenen Achsen besitzt und ihre Ausgleichvorgänge nicht so großes Interesse auf sich vereinigen wie diejenigen von Synchronmaschinen. Später wurde diese PARKsche Zwei-Achsen-Theorie auf normale Asynchronmaschinen angewendet, und in gleicher Art wurden auch ihre Ausgleichvorgänge untersucht [5].

Man sagt, daß der Wert dieser Theorie auf der physikalischen Interpretation liege. Die benutzten Achsengrößen, auf denen die ganze Theorie beruht, machen die ganze Rechnung aber umständlich, denn man interessiert sich vor allem für die wirklichen physikalischen Größen in der komplexen Form (z. B.  $\bar{I} = \sum_{\alpha} I_{\alpha} \cdot e^{j(r_{\alpha}t + \varphi_{\alpha})}$ ), nicht aber für die Achsengrößen. Wenn man einen Betrieb untersuchen will, muß man die gegebenen Größen zuerst in die Achsengrößen zerlegen und nach der Rechnung — die fast immer im Bildbereich der LAPLACE-Transformation durchzuführen ist — die im Zwei-Achsen-System erhaltenen Resultate in die gesuchten wirklichen Größen rückrechnen. Diese umständlichen Nebenoperationen für jeden Anwendungsfall könnte man aber durch eine andere Darstellung der Theorie umgehen. Dies ist das Ziel der vorliegenden Arbeit.

## 2. Allgemeines über die Rechnungsart und die Voraussetzungen

Der Rechnung wurde das Per-Unit-System zugrunde gelegt, d. h. es handelt sich bei allen Größen um Relativwerte, welche auf Bezugsgrößen bezogen sind. Nur die stark gezeichneten großen Buchstaben behalten ihre physikalische Dimension bei. Zur Einführung der hier verwendeten dimensionslosen Größen wird die Arbeit von TH. LAIBLE empfohlen [4]. Für die Bezeichnungen und ihre Bedeutung verweisen wir auf die Formelzeichen-Aufstellung.

Es handelt sich hier um die modifizierte LAPLACE-Transformation, welche von CARSON, VAN DER POL und K. W. WAGNER weitgehend behandelt wurde.

Außer den üblichen Annahmen der normalen Theorie, nämlich Linearität der Magnetfelder, konstanter Luftspalt, fehlende Stromverdrängung und Zusatzverluste, nehmen wir weiter an, daß die Drehzahl der Maschine konstant ist, oder sich so langsam ändert, daß die Änderungsgeschwindigkeit der Drehzahl auf die Spannungsgleichungen keinen Einfluß ausübt.



### 3. Grundgleichungen der beiden Achsen

Die bekannte Theorie der Synchronmaschine liefert die nachfolgenden Grundgleichungen. Zu ihrer Herleitung verweisen wir auf die Literatur [4].

$$u_d - e_d = -R i_d - \frac{d}{dt} [X_d i_d + i_D - i_f], \quad (3.1)$$

$$u_f = i_f + T_f \cdot \frac{d}{dt} [i_f - (1 - \sigma_{df}) X_d i_d - (1 - \mu_f) i_D], \quad (3.2)$$

$$0 = i_D + T_D \cdot \frac{d}{dt} [i_D + (1 - \sigma_{dD}) X_d i_d - (1 - \mu_D) i_f], \quad (3.3)$$

$$u_q - e_q = -R i_q - \frac{d}{dt} [X_q i_q + i_Q], \quad (3.4)$$

$$0 = i_Q + T_Q \cdot \frac{d}{dt} [i_Q + (1 - \sigma_q) X_q i_q]. \quad (3.5)$$

$e_d$  und  $e_q$  stellen hier die elektromotorischen Kräfte dar, welche in einer Achse durch die Rotationsbewegung des Rotors von dem momentanen Fluß in der anderen Achse erzeugt werden. Diese sind:

$$e_d = (1 - s) [X_q i_q + i_Q] = (1 - s) \psi_q, \quad (3.6)$$

$$e_q = - (1 - s) [X_d i_d + i_D - i_f] = - (1 - s) \psi_d. \quad (3.7)$$

Die konstant angenommene Drehzahl des Rotors wurde hier mit dem Schlupf  $s$  als  $(1 - s)$  ausgedrückt, wie es bei den Asynchronmotoren üblich ist. Auf die Vorzeichen der Glieder gehen wir hier nicht ein, denn diese ersieht man ohne Schwierigkeiten aus den Gleichungen und dem stationären Vektordiagramm der Synchronmaschine.

Die in den obigen 7 Gleichungen angenommenen Bezugsgrößen für die Rotorgrößen sind willkürlich. Der Wunsch, den idealen Leerlauf-Polradstrom  $I_{fl}$  bzw. die Leerlauf-Polradspannung  $U_{fl}$  wie die Nennspannung 1 pu zu nennen, ist der einzige Grund für die angenommenen Bezugsgrößen des Erregungskreises. Der Polradwiderstand  $R_f$  (in Ohm) wird folglich die Bezugsgröße für alle Widerstände im Erregungskreis. Da es für die Dämpferwicklung kaum physikalisch einleuchtende Bezugsgrößen gibt, wählt man, in rein formaler Analogie, die ähnlichen Bezugsgrößen für  $i_D$  und  $i_Q$ . Diese können alle zusammen wie folgt ausgedrückt werden (bezüglich der Definitionen von Streu- und Abschirmungskoeffizienten  $\sigma$  und  $\mu$  siehe die Formelzeichen-Aufstellung).

$$I_f = \frac{P_n}{U_n} \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{L_{dd}(1 - \mu_d)}{L_{ff}(1 - \mu_f)}} \cdot \frac{i_f}{(1 - \mu_d) X_d}, \quad (3.8)$$

$$I_D = \frac{P_n}{U_n} \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{L_{dd}(1 - \mu_d)}{L_{DD}(1 - \mu_D)}} \cdot \frac{i_f}{(1 - \mu_d) X_d}, \quad (3.9)$$

$$I_Q = \frac{P_n}{U_n} \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{L_{qq}(1 - \sigma_q)}{L_{QQ}(1 - \sigma_Q)}} \cdot \frac{i_Q}{(1 - \sigma_q) X_q}. \quad (3.10)$$

Setzt man in Gl. (3.8)  $i_f = 1$  pu ein, so erhält man den idealen Leerlauf-Polradstrom. Dieser läßt sich aber noch einfacher als in Gl. (3.8) ausdrücken, nämlich:

$$I_{fl} = \sqrt{\frac{P_n}{2 \pi f \cdot L_f (X_d - X'_d)}}. \quad (3.8a)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann man die Induktivität der Feldwicklung  $L_f$  sowie ihre Zeitkonstante  $T_f = L_f/R_f$  errechnen. Weiter ist zu beachten, daß der Dämpferkreis in beiden Achsen zwei verschiedene Bezugsgrößen  $I_D$  und  $I_Q$  aufweist, was eigentlich einen Nachteil bedeutet. Das zeigt sich beispielsweise bei der Berechnung der Stabströme der Dämpferwicklung.

#### 4. Ersatzschemata der $d$ - und $q$ -Achsen

Würde auf den vorhin erwähnten Wunsch bei den ausgewählten Bezugsgrößen der Rotorkreise verzichtet, könnte man ebensogut andere Rotor-Bezugsgrößen definieren und die ganze Rechnung ohne weiteres durchführen. Um einen besseren Überblick auf die Wirkungsart der Wicklungen in den beiden Achsen zu gewinnen, verzichten wir vorläufig auf diesen Wunsch und definieren die neuen Bezugsgrößen, die wir mit einem darübergesetzten „‘“-Zeichen von den alten unterscheiden. Die Zusammenhänge zwischen den neuen und den alten Per-Unit-Größen sind:

$$i_f' = - \frac{i_f}{(1 - \mu_d) X_d}, \quad (4.1)$$

$$i_D' = \frac{i_D}{(1 - \mu_d) X_d}, \quad (4.2)$$

$$i_Q' = \frac{i_Q}{(1 - \sigma_q) X_q}, \quad (4.3)$$

$$u_f' = - \frac{u_f}{(1 - \mu_f) T_f}. \quad (4.4)$$

Mit diesen neuen Per-Unit-Größen kann man von den ersten drei Gleichungen ausgehend eine Schaltung entwickeln, die als vollkommenes Ersatzschema der  $d$ -Achsen betrachtet werden darf (Bild 1a). Dies erlaubt uns, die Wirkung der Induktivitäten der Ersatzwicklungen in der  $d$ -Achse zu zerlegen. Jede Wicklung erzeugt zuerst ihren eigenen Streufluß; der alle drei Wicklungen umschließende Hauptfluß rührt von der gemeinsamen Induktivität  $(1 - \mu_d) X_d$  her.

Die Gln. (4.8) und (4.9) mit den neuen Per-Unit-Größen liefern in gleicher Weise eine zweite Schaltung, die als vollkommenes Ersatzschema der  $q$ -Achse gilt (Bild 2). Hier fällt die dritte Wicklung aus; damit steht die Statorwicklung der  $q$ -Achse derjenigen des Dämpferkreises gegenüber.

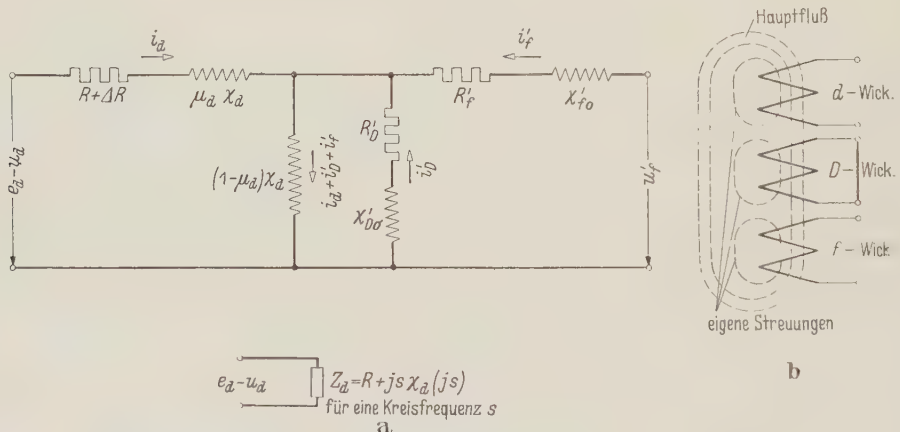


Bild 1. Ersatzschema der  $d$ -Achse von Synchronmaschinen.

Ohmsche Widerstände	Induktivitäten	Impedanzen für die Kreisfrequenz $s$
$R_f' = \frac{1 - \mu_d}{1 - \mu_f} \cdot \frac{X_d}{T_f}$	$X_f' \sigma = \frac{1 - \mu_d}{1 - \mu_f} \cdot \mu_f \cdot X_d$	$Z_f' = R_f' + j s X_f' \sigma$
$R_D' = \frac{1 - \mu_d}{1 - \mu_D} \cdot \frac{X_d}{T_D}$	$X_D' \sigma = \frac{1 - \mu_d}{1 - \mu_D} \cdot \mu_d \cdot X_D$	$Z_D' = R_D' + j s X_D' \sigma$

Von der Spannungsquelle  $e_d - u_d$  in Bild 1a aus gesehen, bildet diese Schaltung für die  $d$ -Achse nichts anderes als die Längsimpedanz der Synchronmaschine. Für eine Kreisfrequenz  $s$  ist sie

$$Z_d(j s) = R + j s X_d(j s). \quad (4.5)$$

Die Funktion  $X_d(j s)$  kann ohne Schwierigkeiten vom Ersatzschema abgeleitet werden, wenn man in der betreffenden Schaltung  $u_f = 0$  einsetzt und für die Kreisfrequenz  $s$  die Längsimpedanz



bestimmt. (Für den Übergang von einer Bildfunktion, z. B.  $X_d(p)$ , zu ihrer stationären Originalfunktion bei einer bestimmten Kreisfrequenz siehe den Anhang II). In ganz ähnlicher Weise kann auch die Querimpedanz aus dem Ersatzschema in Bild 2 ermittelt werden.

$$Z_q(j s) = R + j s X_q(j s) . \quad (4.6)$$

Anhand dieser Ersatzschemata in Bild 1 und 2 können die Dämpferströme  $I_D$  und  $I_Q$  sowie der Polradstrom  $I_f$  beim stationären Asynchronbetrieb berechnet werden, wenn die Achsenkomponente des Statorstromes  $I_d$  und  $I_q$  für diesen Betrieb bekannt sind.

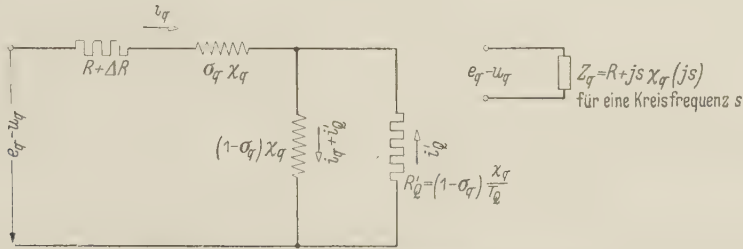


Bild 2. Ersatzschema der  $q$ -Achse von Synchronmaschinen.

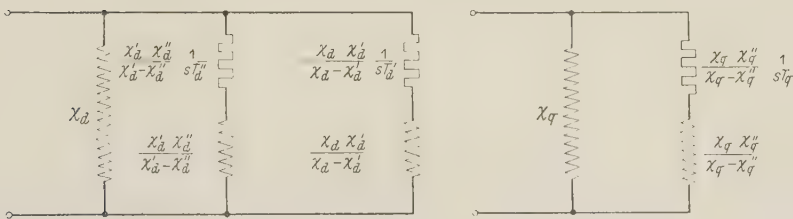


Bild 3. Mathematische Zerlegung der Funktionen  $X_d(j s)$  und  $X_q(j s)$ .

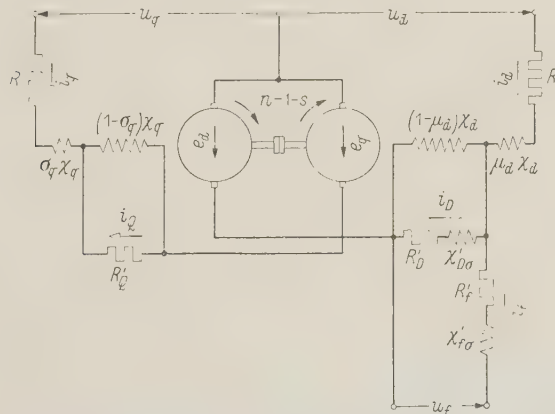


Bild 4. Nachbildung einer Synchronmaschine in der Zwei-Achsen-Theorie (für die Legende siehe Bild 1,2).

In der Literatur kommt es oft vor, daß man als Ersatzschemata die Schaltungen in Bild 3 angibt. Zur Unterscheidung soll beachtet werden, daß diese Ersatzschaltungen nur auf einer mathematischen Zerlegung der Funktionen  $X_d(j s)$  und  $X_q(j s)$  beruhen und physikalisch kaum bedeutend sind. Die Ersatzschemata der  $d$ - und  $q$ -Achse von CONCORDIA [3] sind in einer Hinsicht auch nicht vollkommen. Erstens können sie für den Synchronbetrieb einer erregten Synchronmaschine nicht mehr gelten (die Erregung kommt nicht zum Vorschein), zweitens wurde nicht

bekanntgegeben, daß die Rotorgrößen in diesem Ersatzschemata andere Bezugsgrößen aufweisen. Das kann bei der Berechnung der Rotorgrößen manchmal Fehler und Schwierigkeiten geben, z. B. den bei asynchronem Betrieb in Feldwicklung induzierten Strom kann man aus diesem Schema ohne Beachtung der Änderung der Bezugsgrößen nicht ableiten.

Die elektromotorischen Kräfte  $e_d$  und  $e_q$  dürfen gemäß ihrer Definition in Gl. (3.6) und (3.7) als die EMK je einer idealen Gleichstrommaschine betrachtet werden, die der Reihe nach mit Feldern  $(X_q i_q + i_0)$  und  $-(X_d i_d + i_D - i_f)$  erregt und mit der Drehzahl  $(1 - s)$  angetrieben sind. Mit dieser Überlegung gelangt man zu einem Ersatzschema der ganzen Maschine, in dem nur die Achsenspannungen  $u_d$ ,  $u_q$ , die Erregung  $u_f$  und die Drehzahl als freie Parameter in Erscheinung treten (Bild 4). Dieses Ersatzschema ist als mathematische Erklärung und Nachbildung der Synchronmaschine anzusehen. Dieses erfüllt die Hauptgleichungen der Synchronmaschine in der allgemeinen Theorie, und deshalb können alle Betriebsarten und Ausgleichvorgänge der Maschine im Rahmen dieser Theorie nach diesem Ersatzschema überlegt werden.

### 5. Allgemeiner Zusammenhang zwischen den Achsengrößen im Bildbereich der Laplace-Transformation

Die allgemeinen Beziehungen zwischen den Stator- und Rotorgrößen sind durch die Gl. (3.1) und (3.5) angegeben. Diese fünf Differentialgleichungen lassen sich leider nicht leicht lösen. Mit der Anwendung der LAPLACE-Transformation kann man die Dämpferströme und den Feldstrom eliminieren, und somit ergeben sich zwei Gleichungen im Bildbereich, die nur zwei Unbekannte, nämlich  $\tilde{i}_d$  und  $\tilde{i}_q$  enthalten [4].

$$p G_f(p) \cdot (\tilde{u}_f - I_{f_0}) - (\tilde{u}_d - U_{d_0}) + D(p) = Z_d(p) \cdot (\tilde{i}_d - I_{d_0}) - (1 - s) X_q(p) \cdot (\tilde{i}_q - I_{q_0}), \quad (5.1)$$

$$(1 - s) G_f(p) \cdot (\tilde{u}_f - I_{f_0}) - (\tilde{u}_q - U_{q_0}) + Q(p) = (1 - s) X_d(p) \cdot (\tilde{i}_d - I_{d_0}) + Z_q(p) \cdot (\tilde{i}_q - I_{q_0}). \quad (5.2)$$

Die Funktionen, die hier zur Abkürzung der Gleichungen gebraucht wurden, sind wie folgt definiert.

$$X_d(p) = X_d \frac{1 + p(\sigma_{dD} T_D + \sigma_{fD} T_f) + p^2 \sigma_{fD} T_D T_f X_d''/X_d}{1 + p(T_D + T_f) + p^2 \sigma_{fD} T_D T_f} = X_d \frac{(1 + p T_d') (1 + p T_d'')}{(1 + p T_{d_0}') (1 + p T_{d_0}'')}, \quad (5.3)$$

$$X_q(p) = X_q \frac{1 + p \sigma_q T_Q}{1 + p T_Q} = X_q \frac{1 + p T_q''}{1 + p T_Q}, \quad (5.4)$$

$$G_f(p) = \frac{1 + p \mu_D T_D}{1 + p(T_D + T_f) + p^2 \sigma_{fD} T_D T_f} = \frac{1 + p \mu_D T_D}{(1 + p T_{d_0}') (1 + p T_{d_0}'')}, \quad (5.5)$$

$$D(p) = p G_f(p) \cdot \frac{1 + p \mu_f T_f}{1 + p \mu_D T_D} I_{D_0} - \frac{1 - s}{1 + p T_Q} I_{Q_0} + \left( \frac{d\psi_d}{dt} \right)_0, \quad (5.6)$$

$$Q(p) = (1 - s) G_f(p) \cdot \frac{1 + p \mu_f T_f}{1 + p \mu_D T_D} I_{D_0} - \frac{p}{1 + p T_Q} I_{Q_0} + \left( \frac{d\psi_q}{dt} \right)_0. \quad (5.7)$$

Obwohl der komplizierte Inhalt der Funktionen von  $D(p)$  und  $Q(p)$  für weitere Überlegungen grundsätzlich keine Schwierigkeiten bereitet, wollen wir hier einige Annahmen machen, wodurch sich die Matrix-Gleichungen im zweiten Teil dieser Arbeit beträchtlich vereinfachen. Wie aus Gl. (5.6) und (5.7) ersichtlich ist, sind die Bildfunktionen  $D(p)$  und  $Q(p)$  hauptsächlich nur vom Anfangszustand der Dämpferwicklung abhängig. Die Glieder  $\left( \frac{d\psi_d}{dt} \right)_0$  und  $\left( \frac{d\psi_q}{dt} \right)_0$  sind null, wenn die Dämpferwicklung am Anfang stromlos ist. Die Funktionen  $\frac{d\psi_d}{dt}$  und  $\frac{d\psi_q}{dt}$  können sogar bei der angenäherten Ermittlung der Transferfunktionen der belasteten Synchronmaschine vernachlässigt werden [7], was eigentlich für eine allgemeine Untersuchung nicht zulässig ist. Wir nehmen hier vorläufig an, daß die Dämpferwicklung unmittelbar vor Beginn des untersuchten Falls stromlos ist oder einen sehr kleinen Strom führt, so daß die Funktionen  $D(p)$  und  $Q(p)$  neben den



anderen Gliedern einwandfrei vernachlässigt werden können. Unter dieser Voraussetzung werden die Gl. (5.1) und (5.2) in der Matrix-Darstellung zu

$$\begin{bmatrix} p G_f(p) \\ (1-s) G_f(p) \end{bmatrix} (\tilde{u}_f - I_{f_0}) - \begin{bmatrix} \tilde{u}_d - U_{d_0} \\ \tilde{u}_q - U_{q_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R + p X_d(p) & -(1-s) X_q(p) \\ (1-s) X_d(p) & R + p X_q(p) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{i}_d - I_{d_0} \\ \tilde{i}_q - I_{q_0} \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

Die Gln. (5.1) und (5.2) sind lineare Gleichungen. Hier dürfen die Größen  $u_f - I_{f_0}$ ,  $(u - U_0)_{dq}$  und  $(i - I_0)_{dq}$  in komplexer Form der Wechselgrößen, also in vektorieller Form ausgedrückt werden. In dieser Schreibweise erzielt man einen Vorteil, denn das Überlagerungsprinzip erlaubt uns nun jeden gegebenen Fall, welcher aus dem stationären Betrieb beginnt, als einen aus dem Ruhezustand beginnenden Fall zu betrachten. Zu diesem Zwecke betrachten wir im folgenden einen Übergang vom alten stationären Zustand (gegeben durch die Vektoren  $\bar{I}_{f_0}$ ,  $\bar{U}_{d_0}$ ,  $\bar{u}_{q_0}$ ,  $\bar{I}_{d_0}$  und  $\bar{I}_{q_0}$ ) in einen neuen als einen Vorgang, welcher vom Ruhezustand aus gegen die Größen  $\bar{U}_f - \bar{I}_{f_0}$ ,  $\bar{U}_d - \bar{U}_{d_0}$ ,  $\bar{U}_q - \bar{U}_{q_0}$ ,  $\bar{I}_d - \bar{I}_{d_0}$  und  $\bar{I}_q - \bar{I}_{q_0}$  strebt. Gl. (5.8) wird nun zu

$$\begin{bmatrix} p G_f(p) \\ (1-s) G_f(p) \end{bmatrix} \cdot \Delta \tilde{U}_f - \begin{bmatrix} \Delta \tilde{U}_d \\ \Delta \tilde{U}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R + p X_d(p) & -(1-s) X_q(p) \\ (1-s) X_d(p) & R + p X_q(p) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta \tilde{I}_d \\ \Delta \tilde{I}_q \end{bmatrix}. \quad (5.8a)$$

Die Bildfunktionen der vektoriellen Spannungs- und Strommatrizen haben wir hier zur Unterscheidung mit großen Buchstaben gekennzeichnet.

$$\left. \begin{aligned} \Delta \bar{U}_d &= \bar{U}_d - \bar{U}_{d_0} \doteq \Delta \tilde{U}_d, & \Delta \bar{U}_q &= \bar{U}_q - \bar{U}_{q_0} \doteq \Delta \tilde{U}_q, & \Delta \bar{U}_f &= \bar{U}_f - \bar{I}_{f_0} \doteq \Delta \tilde{U}_f, \\ \Delta \bar{I}_d &= \bar{I}_d - \bar{I}_{d_0} \doteq \Delta \tilde{I}_d, & \Delta \bar{I}_q &= \bar{I}_q - \bar{I}_{q_0} \doteq \Delta \tilde{I}_q. \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

In dieser vektoriellen Schreibweise sind nun die Anfangsgrößen  $\bar{U}_{d_0}$ ,  $\bar{U}_{q_0}$ ,  $\bar{I}_{d_0}$ ,  $\bar{I}_{q_0}$  und  $\bar{I}_{f_0}$  nicht mehr als konstant anzusehen. Somit kann Gl. (5.8a) auch für einen aus dem stationären Asynchronbetrieb beginnenden Fall verwendet werden.

## 6. Zusammenhang zwischen den Strom-Spannungssystemen im Bildbereich der Laplace-Transformation (Admittanz-Operator-Matrizen im Bildbereich)

Mit dem Wort „System“ meint man hier die symmetrischen Komponenten, d. h. das Mitsystem, das Gegensystem und das Nullsystem. Damit sich die Gleichungen in der Schreibweise vereinfachen, wird hier das Nullsystem vernachlässigt. Dieses läßt sich am Schluß der Rechnung durch das Überlagerungsprinzip ohne weiteres berücksichtigen.

Unserer Betrachtung legen wir die Gl. (5.8a) zugrunde. Die Glieder der Matrizen von dieser Gleichung bestehen aus Bildfunktionen. Die Bildfunktionen stellen stets in ihren Konvergenzhalbebenen eine analytische Funktion dar. Dies erlaubt uns, auf sie die weitgehenden Methoden der komplexen Funktionenentheorie anzuwenden [8].

Betrachten wir im folgenden ein Koordinatensystem, welches sich mit dem Rotor zusammen dreht, und nennen wir es „Rotorsystem“. Die  $d$ - $q$ -Diagonalkomponenten befinden sich in diesem Rotorsystem derart, daß die reelle Achse des Systems und die  $d$ -Achse des Rotors zusammenfallen. Im Rotorsystem bleibend, darf man von den Diagonalkomponenten auf die symmetrischen Komponenten übergehen. Der Zusammenhang zwischen den beiden Komponentensystemen für eine Größe  $A$  ist:

$$\begin{bmatrix} \overset{\circ}{A}_d \\ \overset{\circ}{A}_q \end{bmatrix} = ||\Gamma|| \times \begin{bmatrix} \overset{\circ}{A}_m \\ \overset{\circ}{A}_g \end{bmatrix}_{Rot.} \quad \begin{bmatrix} \overset{\circ}{A}_m \\ \overset{\circ}{A}_g \end{bmatrix}_{Rot.} = \overset{-1}{||\Gamma||} \times \begin{bmatrix} \overset{\circ}{A}_d \\ \overset{\circ}{A}_q \end{bmatrix}, \quad (6.1)$$

wobei  $\Gamma$  und  $\Gamma^{-1}$  die Transformationsmatrix und ihre inverse Matrix darstellen [10].

$$\|\Gamma\| = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix} \quad \|\Gamma\|^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

In dieser Schreibweise gilt der Zusammenhang (6.1) nur für das System, in dem alle Komponenten die gleiche Frequenz  $\nu$  aufweisen. Da es in einem Netz hauptsächlich nur eine Frequenz gibt, verwendet man in der Literatur oft diese Schreibart. Im asynchronen Betrieb einer Schenkelpol-Synchronmaschine mit der Drehzahl  $(1 - s)$ , weist der Statorstrom zwei verschiedene Frequenzen auf, nämlich 1 ( $1 \triangleq 50$  Hz) und  $(1 - s)$ , obwohl die Synchronmaschine durch eine symmetrische Quelle mit der Nennfrequenz 1 gespeist wird. Also muß man hier ein System mit verschiedenen Frequenzen betrachten. In diesem Fall kann die Gl. (6.1) nicht mehr verwendet werden. Das Überlagerungsprinzip erlaubt uns aber, die Transformationsmatrix  $\Gamma$  auch in solchen Fällen zu verwenden unter der Bedingung, daß man die Größe  $A$  in der komplexen Form der Wechselgrößen als eine Summe ausdrückt und dabei die Gegenkomponente durch ihren konjugierten Wert ersetzt.

$$A_{dq} = \|\Gamma\| \times \bar{A}_{mg \text{ Rot.}} \quad A_{mg \text{ Rot.}} = \|\Gamma\|^{-1} \times \bar{A}_{dq}. \quad (6.3)$$

Die Matrizen  $\bar{A}_{dq}$  und  $\bar{A}_{mg \text{ Rot.}}$  sind nun wie folgt zu definieren:

$$\bar{A}_{mg \text{ Rot.}} = \begin{bmatrix} \bar{A}_m \\ \bar{A}_g^* \end{bmatrix}_{\text{Rot.}} = \begin{bmatrix} \sum_{\alpha} |A_{m\alpha}| e^{j\nu_{\alpha} t} \\ \sum_{\alpha} |A_{g\alpha}| e^{j\nu_{\alpha} t} \end{bmatrix}_{\text{Rot.}}, \quad A_{dq} = \begin{bmatrix} \bar{A}_d \\ A_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{\alpha} |A_{d\alpha}| e^{j\nu_{\alpha} t} \\ \sum_{\alpha} |A_{q\alpha}| e^{j\nu_{\alpha} t} \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

Die im Rotorsystem geschriebenen symmetrischen Komponenten wurden hier mit dem Index „Rot.“ versehen und somit von den üblichen, im Statorsystem definierten symmetrischen Komponenten unterschieden. Im Grunde genommen ist der Zusammenhang zwischen den beiden Systemen nichts anderes als eine Rotations-Transformation im Sinne der Komplex-Darstellung. Darauf werden wir im nächsten Abschnitt zurückkommen.

Wendet man auf die Gl. (5.8a) die Transformationsmatrix  $\Gamma$  an, so ergibt sich nach einigen Multiplikationen eine neue Matrix-Gleichung, in der nur die symmetrischen Komponenten vorkommen:

$$\|\Gamma\|^{-1} \times \|Z_{dq}\|^{-1} \times \|F_{dq}\| \Delta \tilde{U}_{f \text{ Rot.}} = \|\Gamma\|^{-1} \times \|Z_{dq}\|^{-1} \times \|\Gamma\| \times \|\Delta \tilde{U}_{mg}\|_{\text{Rot.}} = \Delta \tilde{I}_{mg \text{ Rot.}}.$$

Nachdem man die Matrix-Multiplikationen durchgeführt hat, erscheint diese Gleichung in folgender Form:

$$\|Y_f\| \Delta \tilde{U}_{f \text{ Rot.}} = \|Y_u\| \times \|\Delta \tilde{U}_{mg}\|_{\text{Rot.}} = \Delta \tilde{I}_{mg \text{ Rot.}}, \quad (6.5)$$

wobei die Admittanz-Matrizen, wie folgt zu definieren sind:

$$\|Y_f\| = \frac{G_f(p)}{2N(p)} \begin{bmatrix} [p + j(1-s)] \{R + [p - j(1-s)] X_q(p)\} \\ [p - j(1-s)] \{R + [p + j(1-s)] X_q(p)\} \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

$$\|Y_u\| = \frac{1}{2N(p)} \begin{bmatrix} 2R + [p - j(1-s)] [X_d(p) + X_q(p)] & -[p + j(1-s)] [X_d(p) - X_q(p)] \\ -[p - j(1-s)] [X_d(p) - X_q(p)] & 2R + [p + j(1-s)] [X_d(p) + X_q(p)] \end{bmatrix}. \quad (6.7)$$

$$N(p) = R^2 + pR [X_d(p) + X_q(p)] + [p^2 + (1-s)^2] X_d(p) \cdot X_q(p). \quad (6.8)$$



Die Matrix-Gleichung (6.5) und ihre Admittanzmatrizen, die nur zur Zwischenkenntnis geschrieben wurden, eignen sich in der vorliegenden Form nicht für weitere Entwicklungen, d. h. für die Anwendung der Rücktransformation im Originalbereich. Diese Funktionen von  $p$  sind aber rationale Funktionen, welche sich in der Form eines Bruches

$$f(p) = \frac{f_n(p)}{f_m(p)}$$

schreiben lassen, worin  $f_n(p)$  ein Polynom  $n$ . Grades und  $f_m(p)$  ein Polynom  $m$ . Grades ist ( $n \leq m$ ). Mit dieser Kenntnis läßt sich die Gl. (6.5) in folgender Form schreiben,

$$\frac{1}{2 P(p)} \begin{bmatrix} C(p) \\ C^*(p) \end{bmatrix} \Delta \tilde{U}_{t_{Rot.}} = \frac{1}{2 P(p)} \begin{bmatrix} A(p) & B^*(p) \\ B(p) & A^*(p) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta \tilde{U}_m \\ \Delta \tilde{U}_g \end{bmatrix}_{Rot.} = \begin{bmatrix} \Delta \tilde{I}_m \\ \Delta \tilde{I}_g \end{bmatrix}_{Rot.} \quad (6.5a)$$

wobei die Polynome  $A(p)$ ,  $B(p)$ ,  $C(p)$ , 4. Grades und das Polynom  $P(p)$  5. Grades sind. Diese Polynome sind aber sehr kompliziert, wenn man den ohmschen Statorwiderstand  $R$  nicht vernachlässigt. Der Widerstand  $R$  hat normalerweise einen sehr kleinen Wert von 0,0015 — 0,005 pu. Nur bei den allein arbeitenden Generatoren kann dieser einen erheblichen Wert annehmen, denn der äußere Belastungswiderstand ist in diesem Fall auch den Widerstand  $R$  zuzuzählen. Außer diesem Fall, d. h. bei den an einem großen Netz arbeitenden Synchronmaschinen, macht sich der kleine Widerstand  $R$  nur beim Abklingen des Gleichstromanteils in den Ausgleichvorgängen und beim GÖRGESSchen Phänomen bemerkbar. Die Zeitkonstante des abklingenden Gleichstromanteils  $T_a$  liegt zwischen  $T'_a$  und  $T''_a$ . Deswegen darf der Widerstand  $R$  bei einer allgemeinen Untersuchung keinesfalls völlig vernachlässigt werden. Eine genaue Berücksichtigung desselben macht aber die ganze Rechnung unübersichtlich, und dabei ist der Gewinn nicht so groß. Unter Beachtung des Wertes von  $R$ , der gegenüber  $X''_d$  und  $X''_q$  sehr klein ist, lassen sich die Polynome einigermaßen vereinfachen. Somit erhält man für die Gl. (6.5a):

$$\begin{bmatrix} \frac{G_f(p)}{2 X_d(p)} \xi \\ \frac{G_f(p)}{2 X_d(p)} \xi^* \end{bmatrix} \Delta \tilde{U}_{t_{Rot.}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2(p+\gamma)} \left[ \frac{1}{X_d(p)} + \frac{1}{X_q(p)} \right] & \frac{1}{2(p+\gamma^*)} \left[ \frac{1}{X_d(p)} - \frac{1}{X_q(p)} \right] \\ \frac{1}{2(p+\gamma)} \left[ \frac{1}{X_d(p)} - \frac{1}{X_q(p)} \right] & \frac{1}{2(p+\gamma^*)} \left[ \frac{1}{X_d(p)} + \frac{1}{X_q(p)} \right] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta \tilde{U}_m \\ \Delta \tilde{U}_g \end{bmatrix}_{Rot.} = \begin{bmatrix} \Delta \tilde{I}_m \\ \Delta \tilde{I}_g \end{bmatrix}_{Rot.} \quad (6.9)$$

wobei:

$$\gamma \approx \frac{1}{T_a} + j(1-s), \quad \gamma^* \approx \frac{1}{T_a} - j(1-s) = \frac{1}{T_a} + j(1-s'), \quad (6.10)$$

$$\xi \approx \frac{p+j(1-s)}{p+\gamma} \approx 1, \quad \xi^* \approx \frac{p+j(1-s')}{p+\gamma^*} \approx 1, \quad (6.11)$$

$$T_a \approx \frac{2 X''_d \cdot X''_q}{(X''_d + X''_q) R}. \quad (6.12)$$

Hier stellt das Symbol  $s'$  den Schlupf des Rotors gegenüber dem Gegendrehfeld des Stators dar, und sein Wert kann aus dem Zusammenhang

$$s' = 2 - s \quad (6.13)$$

leicht ermittelt werden. In Wirklichkeit ist die Zeitkonstante  $T_a$  und dadurch  $\gamma$  nicht dieselbe für alle Glieder der Admittanzmatrizen. Für eine Maschine, deren Reaktanzen  $X''_d$  und  $X''_q$  jedoch nicht so viel voneinander abweichen, darf man sie für alle Glieder ungefähr gleich groß annehmen. Gemäß ihrer Definition ist die Zeitkonstante  $T_a$  frequenzabhängig, und sie hat im stationären Betrieb ca.  $|X_d(j s)|/X''_d$  mal größeren Wert als der in Gl. (6.12). Der Faktor  $\xi$  ist an und für sich eine Korrektur, die darauf hinweist, daß die Erregung bei der stillstehenden Ma-

schine im stationären Zustand keinen Statorstrom veranlaßt. Außer diesem Fall, der im Betrieb nie vorkommt, darf derselbe als 1 betrachtet werden. Zur Herleitung der Gl. (6.9), d. h. der vereinfachten Funktionen von  $\frac{A(p)}{P(p)}$  . . . usw. in Gl. (6.9), sowie auch der genauen Polynome derselben verweisen wir auf den Anhang I. Mit der in Gl. (6.9) vorgenommenen Vereinfachung wurde hier ein Fehler begangen, der das GÖRGESSche Phänomen verdeckt. Der Fehler macht sich beim Schlupf zwischen ca. 0,40 ÷ 0,60 pu bemerkbar und erreicht bei  $s = 0,5$  sein Maximum, dessen Wert von der Unsymmetrie zwischen den beiden Achsen des Rotors und der Dämpferwicklung abhängt.

Die Gl. (6.9) ist der im Bildbereich der LAPLACE-Transformation aufgestellte, allgemeine Zusammenhang zwischen Strom- und Spannungssystemen.

### 7. Zusammenhang zwischen den Strom- und Spannungssystemen im Originalbereich der Laplace-Transformation (Admittanz-Operator-Matrizen im Originalbereich)

Die Matrix-Gleichung (6.9) eignet sich zur Anwendung der Rücktransformation sehr gut, und dies ist eigentlich der Grund, warum hier die Form der Admittanz-Matrix und nicht diejenige der Impedanz-Matrix bevorzugt wurde. Um die sehr komplizierte Faltung im Oberbereich zu umgehen, nehmen wir an, daß die Beträge der Spannungskomponenten  $\bar{U}_m$ ,  $\bar{U}_g$  und der Polradspannung  $\bar{U}_p$ , nachdem sie plötzlich eingeschaltet sind, konstant bleiben. Unter dieser Voraussetzung darf die Rücktransformation auf die Gl. (6.9) angewendet werden. Man nimmt  $\xi = \xi^* = 1$  an, und somit erhält man im Originalbereich nach ziemlich langer Ableitung die folgende Matrix-Gleichung:

$$\begin{bmatrix} Y_f \\ Y_f \end{bmatrix} \Delta \bar{U}_{f_{Rot.}} = \begin{bmatrix} Y & Y'_R \\ Y_R & Y' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta \bar{U}_m \\ \Delta \bar{U}_g^* \end{bmatrix}_{Rot.} = \begin{bmatrix} \Delta \bar{I}_m \\ \Delta \bar{I}_g^* \end{bmatrix}_{Rot.}, \quad (7.1)$$

wobei bedeuten:

$$\text{Feld-Operator} \quad Y_f = \frac{1}{2 X_d} [1 - f(t)], \quad (7.2)$$

$$\text{Direkt-Operator} \quad Y = \frac{1}{2 \left( j + \frac{1}{T_a} \right)} \left[ \frac{1}{X_d(j s)} + \frac{1}{X_q(j s)} - d(s, t) - q(s, t) \right], \quad (7.3)$$

$$\text{Reaktion-Operator} \quad Y_R = \frac{1}{2 \left( j + \frac{1}{T_a} \right)} \left[ \frac{1}{X_d(j s)} - \frac{1}{X_q(j s)} - d(s, t) + q(s, t) \right]. \quad (7.4)$$

Die anderen Operatoren  $Y'$  und  $Y'_R$  sind dieselben Operatoren wie  $Y$  und  $Y_R$ , mit dem Unterschied, daß sie für den Schlupf  $s'$  geschrieben sind. Die Funktionen, die zur Abkürzung der Operatoren gebraucht wurden, sind wie folgt definiert (bezüglich ihrer Ableitung siehe Anhang II):

$$f(t) = \frac{T'_d - \mu_D T_D}{T'_d - T''_d} e^{-\frac{t}{T'_d}} + \frac{\mu_D T_D - T''_d}{T'_d - T''_d} e^{-\frac{t}{T''_d}}, \quad (7.5)$$

$$d(s, t) = \frac{e^{-\left(j + \frac{1}{T_a}\right)t}}{X_d(-\gamma)} + \left( \frac{1}{X'_d} - \frac{1}{X_d} \right) \frac{j + \frac{1}{T_a}}{j s + \frac{1}{T'_d}} \cdot \frac{e^{-\left(j s + \frac{1}{T'_d}\right)t}}{1 - \gamma \frac{1}{T'_d}} + \left( \frac{1}{X''_d} - \frac{1}{X'_d} \right) \frac{j + \frac{1}{T_a}}{j s + \frac{1}{T''_d}} \cdot \frac{e^{-\left(j s + \frac{1}{T''_d}\right)t}}{1 - \gamma \frac{1}{T''_d}}, \quad (7.6)$$

$$q(s, t) = \frac{e^{-\left(j + \frac{1}{T_a}\right)t}}{X_q(-\gamma)} + \left( \frac{1}{X''_q} - \frac{1}{X_q} \right) \frac{j + \frac{1}{T_a}}{j s + \frac{1}{T''_q}} \cdot \frac{e^{-\left(j s + \frac{1}{T''_q}\right)t}}{1 - \gamma \frac{1}{T''_q}}. \quad (7.7)$$

In vielen Betriebsarten kann die Größe  $1/T_a$  bei der Berechnung der Beträge neben  $j$  vernachlässigt werden. Diese Zeitfunktionen, die alle aus abklingenden  $e$ -Funktionen bestehen, werden nach genügend langer Zeit aus den Admittanzoperatoren in Gln. (7.2) ÷ (7.4) völlig verschwinden. Für einen stationären Betrieb existieren sie nicht mehr.

Die Matrix-Gleichung (7.1) ergibt die im Rotorsystem ausgedrückten Statorstromkomponenten. Um den wirklichen Statorstrom mit allen seinen Komponenten zu erhalten, muß man diese im Rotorsystem ausgedrückten Komponenten auf das Statorsystem transformieren. Damit wir jedes Mißverständnis ausschalten, ziehen wir vor, alle Komponenten des Statorstroms einzeln zu betrachten.

Im KARTESISCHEN System des Rotors sind die Spannungsvektoren in komplexer Form der Wechselgrößen, wie folgt, zu definieren

$$\left. \begin{aligned} \overline{\Delta U}_{t_{Rot.}} &= |\overline{\Delta U}_t| \cdot e^{j^\circ} \text{ reell,} \\ \overline{\Delta U}_{m_{Rot.}} &= |\overline{\Delta U}_m| \cdot e^{j(st + \Theta_m)}, \\ \overline{\Delta U}_{g_{Rot.}} &= |\overline{\Delta U}_g| \cdot e^{-j(s't + \Theta_g)}. \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

Wir betrachten nun ein dem Stator gegenüber ruhendes Koordinatensystem, dessen reelle Achse bei  $t = 0$  mit der  $d$ -Achse (bzw. reellen Achse des Rotorsystems) zusammenfällt. In diesem Koordinatensystem des Stators werden die Spannungsvektoren in Gl. (7.8) zu

$$\left. \begin{aligned} \overline{\Delta U}_t &= (U_t - I_{t_0}) \cdot e^{j(1-s)t}, \\ \overline{\Delta U}_m &= |\overline{U}_m - \overline{U}_{m_0}| \cdot e^{j(t + \Theta_m)}, \\ \overline{\Delta U}_g &= |\overline{U}_g - \overline{U}_{g_0}| \cdot e^{-j(t + \Theta_g)}. \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

Die Blindleistung liegt in diesem System auf der reellen Achse wie beim Kreisdiagramm der synchronmaschine. Das kommt daher, weil wir die  $d$ -Achse des Rotors als reelle Achse angenom-

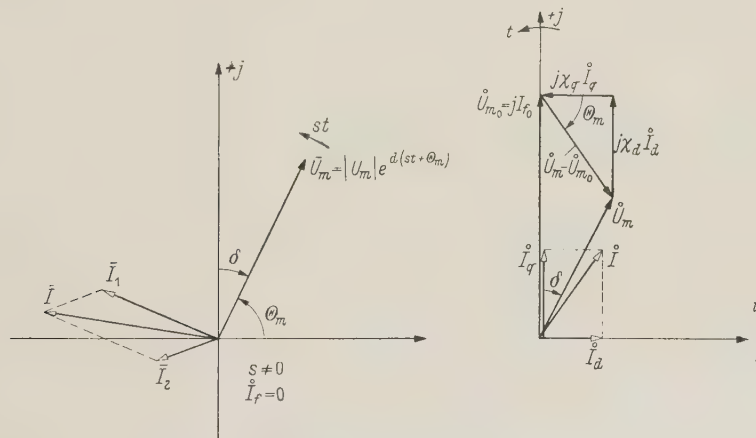


Bild 5. (Erläuterung im Text).

men haben, was sowohl Vor- als auch Nachteile hat. Um einen Überblick über die Lage der Vektoren und die definierten Winkel geben zu können, wurde die Lage der Mitkomponente der Spannung  $\overline{U}_m$  einmal für den asynchronen Betrieb ( $s \neq 0$ ,  $I_t = 0$ ) und einmal für den synchronen Betrieb ( $s = 0$ ,  $I_t \neq 0$ ) in Abb. 5 aufgezeichnet. Der letzte erklärt den Zusammenhang zwischen den Winkeln  $\delta$  und  $\Theta_m$  bei synchronem, stationärem Betrieb.



Mit Hilfe der Gl. (7.8) läßt sich die Matrix-Gleichung (7.1), wie folgt, umformen.

$$\begin{bmatrix} Y_f \\ Y_f \end{bmatrix} \Delta \bar{U}_{f, Rot.} = \begin{bmatrix} Y & Y'_R e^{2j(s't + \Theta_g)} \\ Y_R^* e^{-2j(s't + \Theta_m)} & Y'^* \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta \bar{U}_m \\ \Delta \bar{U}_g \end{bmatrix}_{Rot.} = \begin{bmatrix} \Delta \bar{I}_m \\ \Delta \bar{I}_g \end{bmatrix}_{Rot.} \quad (7.1a)$$

Multipliziert man diese mit  $e^{j(1-s)t}$ , denn das Rotor-system läuft ja gegenüber dem Stator mit der Kreisfrequenz  $(1-s)$  um, so erhält man die endgültige Matrix-Gleichung, welche im Stator-system aufgeschrieben ist.

$$\begin{bmatrix} Y_f \\ Y_f \end{bmatrix} \Delta \bar{U}_f = \begin{bmatrix} Y & Y'_R e^{2j(s't + \Theta_g)} \\ Y_R^* e^{-2j(s't + \Theta_m)} & Y'^* \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta \bar{U}_m \\ \Delta \bar{U}_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \bar{I}_1 \\ \Delta \bar{I}_2 \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

Die Komponenten des Statorstromes liegen nun aber nicht mehr im Bereich des Mit- und Gegensystembegriffes, und deswegen bezeichnen wir sie mit dem Index „1“ und „2“. Wie aus der obigen Matrix-Gleichung ersichtlich ist, bestehen diese Komponenten aus je 3 Teigliedern, die im allgemeinen verschiedene Frequenzen aufweisen. Die Glieder mit dem Admittanzoperator  $Y_f$  werden nur durch die Änderung der Erregung hervorgerufen, und sie sind beim  $s = 0$  als ein Teil der Mitkomponente des Statorstromes anzusehen (s. Gl. (7.9)). Die Glieder, herrührend von den Operatoren  $Y$  und  $Y'^*$ , sind die Grundkomponenten des Statorstroms, die direkt von den Mit- und Gegenkomponenten der Spannung verursacht werden. Wir benennen sie mit „Direktkomponente des Statorstroms“. Die anderen Glieder mit den Operatoren  $Y_R^*$  und  $Y'_R$  sind die „Reaktionskomponente des Statorstroms“. Die Ursache bei der Entstehung dieser Komponenten ist die Umsymmetrie des Rotors in den  $d$ - und  $q$ -Achsen. Bei den normalen Asynchronmaschinen, die keine zwei voneinander verschiedene Achsen besitzen, existieren sie nicht mehr. In der Amerikanischen Literatur bezeichnet man die Direkt- und Reaktionskomponente des Statorstroms für das Mitsystem schon längst mit „Forward current“ und „Backwardcurrent“ [10]. Das Stromglied mit dem Operator  $Y_R^*$  wirkt bei Synchrondrehzahl als Mitkomponente, wie es aus den Gl. (7.9) und (7.10) hervorgeht. Aber das andere Glied, herrührend von  $Y'_R$ , ist als eine Komponente mit fremder Frequenz auch bei Synchrondrehzahl immer vorhanden, wenn die Gegenkomponente der angeschlossenen Spannung nicht null ist.

Der gesamte Statorstrom ergibt sich mit allen seinen Komponenten in Gl. (7.10) wie folgt:

$$\bar{I} = \bar{I}_0 + \Delta \bar{I}_1 + \Delta \bar{I}_2 \quad (7.11)$$

Die Strangströme  $\bar{I}_R$ ,  $\bar{I}_S$  und  $\bar{I}_T$  lassen sich in bekannter Weise aus dem Strom  $\bar{I}$  sofort bestimmen.

Wenn man aus irgendeinem Grunde die Achsenströme rechnen will, ist dies hier sogar ohne Schwierigkeiten möglich. Mit Hilfe der Gl. (6.1) und (6.4) ergeben sie sich aus der Gl. (7.1) in vektorieller Form:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \bar{I}_d &= \Delta \bar{I}_m + \Delta \bar{I}_g^* , \\ \Delta \bar{I}_q &= -j \Delta \bar{I}_m + j \Delta \bar{I}_g^* . \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

## 8. Drehmoment

Im allgemeinen Fall ist das Drehmoment einer elektrischen Maschine durch die folgende Beziehung gegeben.

$$M_d = \text{Im} [\bar{\Psi} \cdot \bar{I}^*] = - \text{Im} [\bar{\Psi}^* \cdot \bar{I}] \quad (8.1)$$

Wenn der gesamte Fluß  $\bar{\Psi}$  und der Statorstrom  $\bar{I}$  in komplexer Form der Wechselgrößen bekannt sind, ergibt sich das Drehmoment als skalarer Wert des Vektorproduktes von diesen zwei Größen.

In der Zwei-Achsen-Theorie erhält man das Drehmoment mit der Formel:

$$M_d = \psi_q \cdot i_d - \psi_d \cdot i_q \quad (8.1a)$$

Dieser Ausdruck kann man unter Beachtung des physikalischen Sinnes des Drehmoments aus dem Ersatzschema in Bild 4 sofort ableiten. Bei diesen Gleichungen (8.1) und (8.1a) ist  $M_d$  das an der Welle erforderliche Antriebsdrehmoment. Es ist also positiv, wenn die Maschine als Generator, und negativ, wenn sie als Motor arbeitet. Da der Strom  $\bar{I}$  mit allen seinen Komponenten bekannt ist [Gl. (7.10) und (7.11)], bevorzugen wir die Gl. (8.1) um das Drehmoment zu rechnen, wofür wir noch  $\bar{\Psi}$  herleiten müssen.

Unter der Annahme, daß die Dämpferwicklung am Anfang stromlos ist, liefert die Zwei-Achsen-Theorie der Synchronmaschine die nachfolgende Beziehung, die man aus den Ersatzschemata in Bild 1 und 2 sofort schreiben kann. Sie ist in ihrer vektoriellen Form auch für einen aus dem stationären Zustand beginnenden Fall gültig.

$$\begin{bmatrix} \Delta \tilde{\Psi}_d \\ \Delta \tilde{\Psi}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_d(p) & 0 \\ 0 & X_q(p) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta \tilde{I}_d \\ \Delta \tilde{I}_q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_f(p) \\ 0 \end{bmatrix} \Delta \tilde{U}_f. \quad (8.2)$$

Mit der Anwendung der Transformationmatrix erhält man daraus:

$$\begin{bmatrix} \Delta \tilde{\Psi}_m \\ \Delta \tilde{\Psi}_g^* \end{bmatrix}_{Rot.} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} X_d(p) + X_q(p) & X_d(p) - X_q(p) \\ X_d(p) - X_q(p) & X_d(p) + X_q(p) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta \tilde{I}_m \\ \Delta \tilde{I}_g^* \end{bmatrix}_{Rot.} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} G_f(p) \\ G_f(p) \end{bmatrix} \Delta \tilde{U}_{f_{Rot.}}. \quad (8.3)$$

Setzt man die Strom-Matrix aus der Gl. (6.9) hier ein, und nach einer langen Umformung, bei der man  $\xi = \xi^* = 1$  einsetzt, ergibt sich dann

$$\begin{bmatrix} \Delta \tilde{\Psi}_m \\ \Delta \tilde{\Psi}_g^* \end{bmatrix}_{Rot.} = - \begin{bmatrix} \frac{1}{p + \gamma} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{p} + \gamma^*} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta \tilde{U}_m \\ \Delta \tilde{U}_g^* \end{bmatrix}_{Rot.}. \quad (8.4)$$

Wir nehmen hier wieder an, daß die Beträge der Spannungsvektoren  $U_m$  und  $\bar{U}_g$  konstant bleiben. Man kann nun auf die Gl. (8.4) die Rücktransformation anwenden (Anhang II). Dadurch erhält man die entsprechende Matrix-Gleichung im Originalbereich, die wir gleich im Statorsystem aufschreiben.

$$\begin{bmatrix} \Delta \Psi_m \\ \Delta \Psi_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{j + \frac{1}{T_a}} \left[ 1 - e^{-\left(j + \frac{1}{T_a}\right)t} \right] & 0 \\ 0 & \frac{1}{j - \frac{1}{T_a}} \left[ 1 - e^{-\left(j - \frac{1}{T_a}\right)t} \right] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta \bar{U}_m \\ \Delta \bar{U}_g \end{bmatrix}. \quad (8.5)$$

Der gesamte Fluß folgt daraus:

$$\bar{\Psi} = \bar{\Psi}_0 + \Delta \bar{\Psi}_m + \Delta \bar{\Psi}_g. \quad (8.6)$$

Nachdem wir den gesamten Fluß  $\bar{\Psi}$  abgeleitet haben, kann das Drehmoment einer Synchronmaschine nach der Gl. (8.1) für jeden allgemeinen Fall unter gemachten Voraussetzungen gerechnet werden.

## 9. Beispiele

### 9.1 Stationärer Synchronbetrieb am symmetrischen Netz

Ein stationärer Betrieb wird in dieser Darstellung der Theorie als der Endzustand eines gegebenen Vorganges betrachtet. Somit verschwinden die zeitlichen Funktionen der Operatoren  $Y$  und  $Y_R$ , nämlich  $d(s, t)$  und  $q(s, t)$ , aus den Gleichungen. Die Anfangsbedingungen eines synchronen Betriebes sind:

$$\Delta \bar{U}_f = 0, \quad \Delta \bar{U}_g = 0, \quad s = 0. \quad (9.1)$$

In Gedanken stellen wir uns vor, daß die Synchronmaschine am Anfang im Leerlauf ( $I_0 = 0$ ) mit der Klemmenspannung  $U_{m_0} = I_f \cdot e^{j(t + \frac{\pi}{2})}$  läuft und in diesem Zustand zum Netz mit der Spannung  $U_m = U \cdot e^{j(t + \frac{\pi}{2} - \delta)}$  parallel geschaltet wird (Bild 5) ( $R = 0$ ). Also ist die Mitkomponente der Spannung:

$$\Delta \bar{U}_m = -j(I_f - U \cdot e^{-j\delta}) e^{jt} = U_x \cdot e^{j(t + \Theta_m)}. \quad (9.2)$$

Die Lage des Vektors  $\Delta \bar{U}_m$  ist in Bild 5 zu sehen. Die Matrix-Gleichung (7.10) lautet für diesen Fall

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2j} \begin{bmatrix} \frac{1}{X_d} + \frac{1}{X_q} \\ \left( \frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) e^{-2j\Theta_m} \end{bmatrix} \cdot \Delta \bar{U}_m. \quad (9.3)$$

Der gesamte Statorstrom beträgt:

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = \dot{I} \cdot e^{jt}. \quad (9.3a)$$

Daraus kann man nach einer kleinen Umformung den Stromvektor  $\dot{I}$  in Funktion vom Polradwinkel  $\delta$  aufschreiben.

$$\dot{I} = \frac{I_f}{X_d} - \frac{U}{X_d} \cos \delta + j \frac{U}{X_q} \sin \delta. \quad (9.4)$$

Dies ist die bekannte Beziehung, auf welcher das Vektordiagramm der Synchronmaschine beruht.

Für den stationären Betrieb an einem symmetrischen Netz hat der Fluß  $\bar{\Psi}$  den folgenden Wert (aus Gl. (8.5)).

$$\bar{\Psi} = j \bar{U}_m = -U e^{j(t - \delta)} = j \dot{U} e^{jt}. \quad (9.5)$$

Setzt man  $\bar{I}$  und  $\bar{\Psi}$  in Gl. (8.1) ein, so erscheint das Drehmoment der Synchronmaschine in bekannter Form:

$$M_d = \frac{U \cdot I_f}{X_d} \cdot \sin \delta - \frac{U^2}{2} \left( \frac{1}{X_d} - \frac{1}{X_q} \right) \sin 2\delta. \quad (9.6)$$

### 9.2 Stationärer Asynchronbetrieb am symmetrischen Netz

Die Zeitfunktionen  $d(s, t)$  und  $q(s, t)$  existieren in einem stationären Betrieb nicht mehr. Somit wird die allgemeine Matrix-Gleichung (7.10) für den stationären synchronen Betrieb einer unerregten Maschine am symmetrischen Netz ( $\bar{U}_g = 0$ ) zu:

$$\frac{j}{2} \begin{bmatrix} \left| \frac{1}{X_d(j s)} + \frac{1}{X_q(j s)} \right| e^{jq(s)} \\ - \left| \frac{1}{X_d(j s)} - \frac{1}{X_q(j s)} \right| e^{-j[2(s t + \Theta_m) + \alpha(s)]} \end{bmatrix} \cdot \bar{U}_m = \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix}. \quad (9.7)$$

Hier wurde die Größe  $\frac{1}{T_a}$  neben  $j$  vernachlässigt.



Es bedeuten:

$\varphi(s)$  Argument der komplexen Zahl von  $\frac{1}{X_d(j s)} + \frac{1}{X_q(j s)}$ ,

$\chi(s)$  Argument der komplexen Zahl von  $\frac{1}{X_d(j s)} - \frac{1}{X_q(j s)}$ .

Der gesamte Statorstrom ergibt

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = \bar{I}_1 e^{j t} + \bar{I}_2 e^{j(1-2s)t}. \quad (9.8)$$

Die Reaktionskomponente  $\bar{I}_2$  mit der Frequenz  $(1-2s)$  wird bei den Asynchronmaschinen verschwinden, da sie im Rotor eine Rotationssymmetrie aufweisen.

Der Zusammenhang (9.7) ist unter der Voraussetzung  $R = 0$  richtig. Wenn man auf die Herleitung der Funktionen in Gl. (7.5) ÷ (7.7) für die Ausgleichvorgänge verzichtet, kann man diesen Zusammenhang in der Form der Impedanz-Matrix ableiten und somit die Impedanz-Operator-Matrix für den stationären Betrieb definieren, wobei sich der Statorwiderstand  $R$  ohne Schwierigkeiten ganz genau berücksichtigen läßt. Diese Impedanz-Operator-Matrix führt uns zu dem ganz exakten Ersatzschema der Synchronmaschine für den stationären Asynchronbetrieb [3].

### 9.3 Dreisträngiger Kurzschluß anschließend an stationäre Belastung

Hier nehmen wir wieder an, daß das Netz am Anfang des Kurzschlusses symmetrisch war. Die Anfangsbedingungen lauten daher:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{U}_m &= -\bar{U}_{m_0} = -j U \cdot e^{j(t-\delta)}, & \Delta \bar{U}_f &= 0, \\ \Delta \bar{U}_g &= 0, & \bar{I}_0 &= \text{wie in Gl. (9.4)}, \quad s = 0. \end{aligned}$$

Mit diesen Anfangsbedingungen liefert die Matrix-Gl. (7.10) den gesuchten Kurzschlußstrom.

$$\bar{I} = \bar{I}_0 + j Y \cdot U e^{j(t-\delta)} - j Y_R^* \cdot U e^{j(t+\delta)} \quad (9.9)$$

oder

$$\dot{I} = \dot{I}_0 + j Y \cdot U e^{-j\delta} - j Y_R^* \cdot U e^{j\delta}. \quad (9.9a)$$

Der Betrag des symmetrischen Anteils dieses Stroms springt bei  $t = 0$  vom Wert  $I_0$  auf den Stoßkurzschlußstrom  $I''$ , und nach dem Abklingen der Ausgleichströme erreicht er den Dauerkurzschlußstrom vom Wert  $I_f/X_d$ .

### 9.4 Drehmoment einer Synchronmaschine bei plötzlicher Änderung der Spannung

Bei der plötzlichen Änderung der Klemmenspannung einer Synchronmaschine entsteht in ihr ein dynamischer Vorgang, welcher im Hinblick auf die Stabilität von großer Bedeutung ist. Wir wollen hier dazu ein numerisch gerechnetes Beispiel beilegen.

Während dem normalen Nenn-Betrieb eines Synchrongenerators sinkt die Klemmenspannung des Generators plötzlich um 20% durch einen Kurzschluß am Netz. Wir nehmen an, daß die Erregung unverändert (ohne Eingriff des Reglers) bleibt, und der Polradwinkel sich wegen dem unendlich großen  $GD^2$  nicht ändern kann. Gesucht: der Drehmomentverlauf  $M(\delta_0, t)$ .

Die Daten der Maschine:

$P = 40 \text{ MVA}$	$500 \text{ U/min}$	$6,3 \text{ KV}$	$\cos \varphi = 0,8$
$H = 5 \text{ sek}$ (für die Rechnung theoretisch $\infty$ )			
$X_d = 1,24$	$X_d' = 0,38$	$X_d'' = 0,27$	$R = 0,0045$
$X_q = 0,82$	—	$X_q'' = 0,264$	
$T_d' = 1,4 \text{ sek}$	$T_d'' = 0,035 \text{ sek}$	$T_q'' = 0,0415 \text{ sek}$	$T_a = 0,191 \text{ sek}$
$I_f$ (Nennerregung) = 1,99 konstant			

Durch die Anwendung der Gl. (7.10), (8.5) und (8.1) erhält man den gesuchten Drehmomentenverlauf  $M(\delta_0, t)$ , welcher in einem 3-Dimensionalen Raum  $(M, \delta_0, t)$  eine Oberfläche bildet (Bild 6). Diese Oberfläche beginnt unmittelbar vor dem Absinken der Spannung mit der Kurve;

$$t \leq 0 \quad M_d \approx 1,605 \sin \delta_0 + 0,205 \sin 2 \delta_0 \quad U = 1 \text{ pu}$$

und mit einem wellenförmigen Verlauf nach der Zeit wird sie zum End-Zustand

$$t \approx \infty, \quad M_d = 1,285 \sin \delta_0 + 0,131 \sin 2\delta_0 \quad U = 0,8 \text{ pu}$$

streben. Dieser wellenförmige Verlauf der Oberfläche  $M(\delta_0, t)$  nach der Zeit  $t$  wird von der Gleichstrom-Komponente verursacht, welche bei den plötzlichen Spannungs-Änderungen hervortritt. Die Welligkeit dieser Oberfläche klingt hauptsächlich mit der Zeitkonstante  $T_a$  ab.

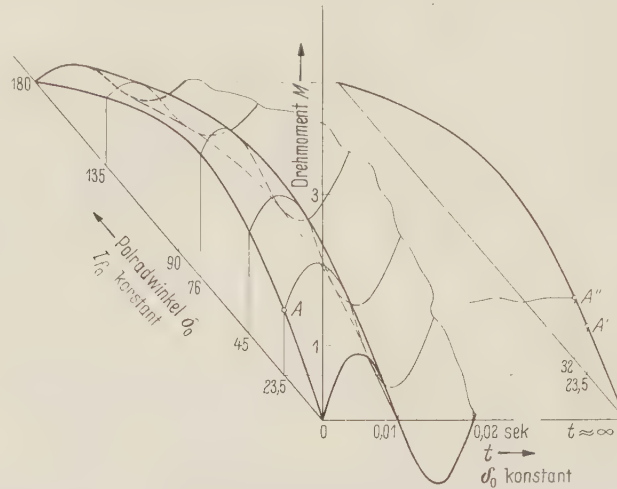


Bild 6. Der zeitliche Drehmoment-Verlauf einer Synchronmaschine bei der plötzlichen 20%-Absenkung der Netzspannung. (Erläuterung im Text).

Bei dieser Rechnung wurde  $H = \infty$  angenommen. Deswegen sollte z.B. der Polradwinkel des normalen Betriebes  $A$  am Ende des dynamischen Vorganges wieder bei  $\delta_0 = 23,5^\circ$  also bei Punkt  $A'$  bleiben. Da das  $GD^2$  des Rotors nicht unendlich groß ist, macht das Polrad je nach dem  $GD^2$  eine relative Bewegung und erreicht im End-Zustand den stabilen Punkt  $A''$  bei ca.  $32^\circ$ .

Wie ersichtlich, hat die Welligkeit des Drehmomentes beim Kompensatorbetrieb ( $\delta_0 = 0$ ) ihren höchsten Wert.

Unter Berücksichtigung der Beweglichkeit des Rotors nimmt diese Oberfläche eine ganz andere Gestalt an, welche vom Anfangszustand stark abhängt. Für die Stabilität einer Synchronmaschine bei einem gegebenen Fall, kann man diese Oberfläche ( $\delta \neq \delta_0$  d. h.  $H \neq \infty$ ) ohne pulsierendes Drehmoment mit 50 und 100 Hz aufzeichnen. Der Polradwinkel bewegt sich nun je nach dem  $GD^2$  auf dieser Oberfläche. Dies ist ein reines Stabilitätsproblem, worauf wir in einer späteren Arbeit die neue Darstellung anzuwenden beabsichtigen, und deswegen gehen wir hier auf die Einzelheiten dieses Problems nicht ein.

### Zusammenfassung

Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit werden die Zwei-Achsen-Theorie von R. H. PARK kurz behandelt und die nach vorgenommenen kleinen Änderungen der Bezugsgrößen erzielten Ersatz-schemata angegeben. Diese verleihen einen richtigen Überblick auf die  $d$ - und  $q$ -Achse und auf die Zeitkonstanten und veranschaulichen damit den Aufbau der Synchronmaschine. Im zweiten Teil, welcher den Hauptteil der Arbeit bildet, wird eine neue Darstellung der Theorie der Synchronmaschine in allgemeiner Form für asynchronen und synchronen Betrieb abgeleitet, wobei die Unsymmetrie des Netzes berücksichtigt wird. Mit Hilfe der hier definierten Operatormatrizen kann man die umständlichen Nebenoperationen für jeden Anwendungsfall, nämlich die Zerlegung der gegebenen wirklichen Größen in zwei Achsen, die Anwendung der LAPLACE-Transformation, die Rechnung im Bildbereich, die Anwendung der Rücktransformation und dann die Zusammensetzung der gesuchten Größen ganz umgehen.

Im letzten Abschnitt der Arbeit werden einige Beispiele zur Verwendung der Operatormatrizen durchgeführt.

## Anhang I

### Ableitung der Glieder der Admittanzoperatoren in Gl. (6.10)

Die Polynome  $A(p)$ ,  $B(p)$ ,  $C(p)$  und  $P(p)$  in Gl. (6.6a) lassen sich aus den Gl. (6,7) und (6.9) leicht ermitteln, wenn man bekannte gebrochene rationale Funktionen von  $X_d(p)$  und  $X_q(p)$  in sie einsetzt. Nach einigen kurzen Umformungen erhält man:

$$P(p) = [p^2 + (1-s)^2] (1 + p T'_d) (1 + p T''_d) (1 + p T_q) X_d X_q + R \cdot P_{zu}(p), \quad (\text{I.1})$$

$$C(p) = [p^2 + (1-s)^2] (1 + p T_q) (1 + p \mu_D T_D) X_q + R [p + j(1-s)] (1 + p T_Q) (1 + p \mu_D T_D), \quad (\text{I.2})$$

$$C^*(p) = [p^2 + (1-s)^2] (1 + p T_q) (1 + p \mu_D T_D) X_q + R [p - j(1-s)] (1 + p T_Q) (1 + p \mu_D T_D), \quad (\text{I.3})$$

$$A(p) = [p - j(1-s)] [X_q (1 + p T_q) (1 + T'_{d_0}) (1 + T''_{d_0}) + X_d (1 + p T'_d) (1 + p T''_d) (1 + p T_Q)] + R A_{zu}(p), \quad (\text{I.4})$$

$$A^*(p) = [p + j(1-s)] [X_q (1 + p T_q) (1 + T'_{d_0}) (1 + p T''_{d_0}) + X_d (1 + p T'_d) (1 + p T''_d) (1 + p T_Q)] + R A_{zu}(p), \quad (\text{I.5})$$

$$B^*(p) = [p + j(1-s)] [X_q (1 + p T_q) (1 + T'_{d_0}) (1 + p T''_{d_0}) - X_d (1 + p T'_d) (1 + p T''_d) (1 + p T_Q)] + R A_{zu}(p), \quad (\text{I.6})$$

$$B(p) = [p - j(1-s)] [X_q (1 + p T_q) (1 + T'_{d_0}) (1 + p T''_{d_0}) - X_d (1 + p T'_d) (1 + p T''_d) (1 + p T_Q)] + R A_{zu}(p), \quad (\text{I.7})$$

wobei die Zusatz-Funktionen  $P_{zu}(p)$  und  $A_{zu}(p)$  sind:

$$P_{zu}(p) = R (1 + p T'_{d_0}) (1 + p T''_{d_0}) (1 + p T_Q) + p [X_q (1 + p T_q) (1 + p T'_{d_0}) (1 + p T''_{d_0}) + X_d (1 + p T'_d) (1 + p T''_d) (1 + p T_Q)], \quad (\text{I. 1a})$$

$$A_{zu}(p) = 2 (1 + p T'_{d_0}) (1 + p T''_{d_0}) (1 + p T_Q). \quad (\text{I. 4a})$$

Wenn man den Ohmschen Statorwiderstand vernachlässigt, werden sich die ersten 4 Polynome sehr vereinfachen. In diesem Fall klingen aber die Gleichstromanteile bei den Ausgleichvorgängen nicht mehr. Um eine bessere Annäherung zu erzielen, setzt man nur in der Gl. (I.1a)  $R = 0$  ein. Die anderen Funktionen mit  $R$  können nun, wie folgt, aufgeschrieben werden.

$$P(p) \approx (1 + p T'_d) (1 + p T''_d) (1 + p T_q) X_d \cdot X_q \left[ p^2 + (1-s)^2 + p R \left( \frac{1}{X_d(p)} + \frac{1}{X_q(p)} \right) \right],$$

$$A(p) = [X_d (1 + p T'_d) (1 + p T''_d) (1 + p T_Q) + X_q (1 + p T'_{d_0}) (1 + p T''_{d_0}) (1 + p T_q)] \times \left[ p - j(1-s) + \frac{2R}{X_d(p) + X_q(p)} \right],$$

$$C(p) = X_q (1 + p T_q) (1 + p \mu_D T_D) \left[ p - j(1-s) + \frac{R}{X_q(p)} \right] [p + j(1-s)],$$

Unter Beachtung des sehr kleinen Wertes von  $R$  kann man diese Funktionen angenähert in folgender Form ausdrücken:

$$P(p) \approx (p + \gamma) (p + \gamma^*) (1 + p T'_d) (1 + p T''_d) (1 + p T_q) X_d X_q, \quad (\text{I.8})$$

$$A(p) \approx (p + \gamma^*) [X_q (1 + p T'_{d_0}) (1 + p T''_{d_0}) (1 + p T_q) + X_d (1 + p T'_d) (1 + p T''_d) (1 + p T_Q)], \quad (\text{I.9})$$

$$A^*(p) \approx (p + \gamma) [X_q (1 + p T'_{d_0}) (1 + p T''_{d_0}) (1 + p T_q) + X_d (1 + p T'_d) (1 + p T''_d) (1 + p T_Q)], \quad (\text{I.10})$$

$$C(p) \approx X_q (1 + p T_q) (1 + p \mu_D T_D) [p + j(1-s)] (p + \gamma^*), \quad (\text{I.11})$$

$$C^*(p) \approx X_q (1 + p T_q) (1 + p \mu_D T_D) [p - j(1-s)] (p + \gamma). \quad (\text{I.12})$$



wobei bedeuten:

$$\gamma \approx \frac{1}{T_a} + j(1-s), \quad \gamma^* \approx \frac{1}{T_a} - j(1-s) = \frac{1}{T_a} + j(1-s'), \quad (\text{I.13})$$

$$\left. \begin{aligned} T_a &= \frac{2 X_d(p) \cdot X_q(p)}{R [X_d(p) + X_q(p)]} \approx \frac{2 \cdot X_d'' \cdot X_q''}{R [X_d'' + X_q'']} && \text{in Gl. (I.8),} \\ T_a &= \frac{X_d(p) + X_q(p)}{2 R} \approx \frac{X_d'' + X_q''}{2 R} && \text{in Gl. (I.9) und (I.10),} \\ T_a &= \frac{X_q(p)}{R} \approx \frac{X_q''}{R} && \text{in Gl. (I.11) und (I.12).} \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.14})$$

Wie aus den Gl. (I. 10) ersichtlich, hat die Zeitkonstante  $T_a$  bei den Funktionen  $A(p)$ ,  $B(p)$ , und  $C(p)$  normalerweise einen anderen Wert als in  $P(p)$ . Da sie aber bei den normalen Maschinen nicht viel voneinander abweichen, haben wir sie in den Gln. (I. 13) und (I. 17) gleich groß angenommen. Die Glieder der Matrix-Gleichung (6.10) lassen sich nun aus den obigen Gleichungen angenähert, wie folgt, schreiben:

$$\frac{A(p)}{P(p)} \approx \frac{1}{p + \gamma} \left[ \frac{1}{X_d(p)} + \frac{1}{X_q(p)} \right] \left. \vphantom{\frac{A(p)}{P(p)}} \right\} \text{Direktglieder,} \quad (\text{I.15})$$

$$\frac{A^*(p)}{P(p)} \approx \frac{1}{p + \gamma^*} \left[ \frac{1}{X_d(p)} + \frac{1}{X_q(p)} \right] \quad (\text{I.16})$$

$$\frac{B^*(p)}{P(p)} \approx \frac{1}{p + \gamma^*} \left[ \frac{1}{X_d(p)} - \frac{1}{X_q(p)} \right] \left. \vphantom{\frac{B^*(p)}{P(p)}} \right\} \text{Reaktionsglieder,} \quad (\text{I.17})$$

$$\frac{B(p)}{P(p)} \approx \frac{1}{p + \gamma} \left[ \frac{1}{X_d(p)} - \frac{1}{X_q(p)} \right] \quad (\text{I.18})$$

$$\frac{C(p)}{P(p)} \approx \frac{p + j(1-s)}{p + \gamma} \frac{G_f(p)}{X_d(p)} \left. \vphantom{\frac{C(p)}{P(p)}} \right\} \text{Erregungsglieder.} \quad (\text{I.19})$$

$$\frac{C^*(p)}{P(p)} \approx \frac{p - j(1-s)}{p + \gamma^*} \frac{G_f(p)}{X_d(p)} \quad (\text{I.20})$$

## Anhang II

### Allgemeines

Es sei ein Vektor in der komplexen Form  $\tilde{I}$  durch seine Bildfunktion  $\tilde{I}$  mit den bekannten Bildfunktionen  $Y(p)$  und  $\tilde{U}$  in folgendem Zusammenhang stehe.

$$\tilde{I} = Y(p) \tilde{U}, \quad (\text{II.1})$$

wobei  $\tilde{U}$  im Originalbereich einem Vektor in der komplexen Form

$$\tilde{U} = U e^{j(\nu t - \Theta)}, \quad U = \text{konst.} \quad (\text{II.2})$$

entspricht und die Bildfunktion  $Y(p)$  eine rationale Funktion von  $p$  ist, die sich in der Form:

$$Y(p) = \frac{Q(p)}{P(p)} = \frac{Q(\infty)}{P(\infty)} + \sum_{x=1}^n \frac{Q(\alpha_x)}{(p - \alpha_x) P'(\alpha_x)} \quad (\text{II.3})$$

schreiben läßt. Darin sind die  $\alpha_1$  bis  $\alpha_n$  die Wurzeln der Gleichung  $P(p) = 0$  und  $P'(\alpha_x)$  stellt die erste Ableitung des Polynoms  $P(p)$  an der Stelle  $p = \alpha_x$  dar. Nun will man den Vektor  $\tilde{I}$  in seiner komplexen Form ermitteln.

Die Bildfunktion von  $\tilde{U}$  ist:

$$\tilde{U} = U e^{-j\Theta} \cdot \frac{p}{p - j\nu}. \quad (\text{II.4})$$

Man setzt diese Funktion von  $U$  in Gl. (II. 1) ein. Unter Beachtung der Verschiebungsregel 1 [6] wendet man darauf die Rücktransformation an, so erhält man nach einigen Umformungen den folgenden Zusammenhang:

$$\bar{I} = Y(\nu, t) \cdot \bar{U} \quad (\text{II.5})$$

wobei

$$Y(\nu, t) = \frac{Q(j\nu)}{P(j\nu)} - \sum_{x=1}^n \frac{Q(\alpha_x)}{(j\nu - \alpha_x) \cdot P'(\alpha_x)} e^{-(j\nu - \alpha_x)t} \quad (\text{II.6})$$

ist.

#### Anwendung der Rücktransformation auf die Matrix-Gleichung (6,10)

Hier werden wir den obigen Ansatz verwenden. Da die Mitkomponente der Spannung im Bezugssystem des Rotors eine Kreisfrequenz von  $s$  und die Gegenkomponente eine solche von  $s'$  aufweist, müssen bei der Anwendung der Gl. (II. 11) für die Glieder  $\frac{A(p)}{P(p)}, \frac{B(p)}{P(p)}, \nu = s$  und für  $\frac{A^*(p)}{P(p)}, \frac{B^*(p)}{P(p)}, \nu = s'$  eingesetzt werden. Für  $G_f(p)/X_d(p)$  ist  $\nu = 0$  einzusetzen, denn die Spannung  $\bar{U}_f$  ist keine Wechselgröße.

Der erste Summand vom Glied  $A(p)/P(p)$  läßt sich nach Gl. (II. 3) schreiben

$$Y_d(p) = \frac{1}{(p + \gamma) X_d(p)} = \frac{1}{(p + \gamma) X_d(-\gamma)} + \frac{1}{X_d} \left[ \frac{(T'_{d0} - T'_d) (T'_d - T''_{d0}) \cdot T'_d}{T'_d (T'_d - T''_d) (1 - \gamma T'_d) (1 + p T'_d)} + \frac{(T'_{d0} - T''_d) (T''_{d0} - T''_d) \cdot T''_d}{T''_d (T'_d - T''_d) (1 - \gamma T''_d) (1 + p T''_d)} \right],$$

oder mit folgenden Definitionen, die in der Literatur bekannt sind:

$$\frac{1}{X_d} \frac{(T'_{d0} - T'_d) (T'_d - T''_{d0})}{T'_d (T'_d - T''_d)} = \frac{1}{X'_d} - \frac{1}{X_d}, \quad (\text{II.7})$$

$$\frac{1}{X_d} \frac{(T'_{d0} - T''_d) (T''_{d0} - T''_d)}{T''_d (T'_d - T''_d)} = \frac{1}{X''_d} - \frac{1}{X_d}, \quad (\text{II.8})$$

ergibt sich:

$$Y_d(p) = \frac{1}{(p + \gamma) X_d(-\gamma)} + \left( \frac{1}{X'_d} - \frac{1}{X_d} \right) \frac{T'_d}{(1 - \gamma T'_d) (1 + p T'_d)} + \left( \frac{1}{X''_d} - \frac{1}{X_d} \right) \frac{T''_d}{(1 - \gamma T''_d) (1 + p T''_d)}. \quad (\text{II.9})$$

Mit der Anwendung des obigen Ansatzes erhält man den Operator  $Y'_d(s, t)$  für eine Spannungskomponente mit der Kreisfrequenz  $s$  wie folgt:

$$Y_d(s, t) = - \frac{1}{j s + \frac{1}{T_d}} \left[ \frac{1}{X_d(j s)} - d(s, t) \right]. \quad (\text{II.10})$$

Darin bedeutet:

$$d(s, t) \approx \frac{e^{-\left(j + \frac{1}{T_d}\right)t}}{X_d(-\gamma)} + \left( \frac{1}{X'_d} - \frac{1}{X_d} \right) \frac{j s + \frac{1}{T_d}}{j s + \frac{1}{T'_d}} \cdot \frac{e^{-\left(j s + \frac{1}{T'_d}\right)t}}{1 - \gamma T'_d} + \left( \frac{1}{X''_d} - \frac{1}{X_d} \right) \frac{j s + \frac{1}{T_d}}{j s + \frac{1}{T''_d}} \cdot \frac{e^{-\left(j s + \frac{1}{T''_d}\right)t}}{1 - \gamma T''_d}. \quad (\text{II.11})$$

Für den zweiten Summand des Gliedes  $A(p)/P(p)$  kann ähnlicherweise der Operator  $Y_q(s, t)$  abgeleitet werden. Dieser ergibt sich

$$Y_q(s, t) = - \frac{1}{j + \frac{1}{T_a}} \left[ \frac{1}{X_q(j s)} - q(s, t) \right], \quad (\text{II.12})$$

wobei

$$q(s, t) = \frac{e^{-\left(j + \frac{1}{T_a}\right)t}}{X_q(-\gamma)} + \left(\frac{1}{X_q''} - \frac{1}{X_q}\right) \frac{j + \frac{1}{T_a}}{j s + \frac{1}{T_q''}} \cdot \frac{e^{-\left(j s + \frac{1}{T_q}\right)t}}{1 - \gamma \frac{1}{T_q''}} \quad (\text{II.13})$$

ist.

Bei der Synchrondrehzahl können sich diese Funktionen beträchtlich vereinfachen. Sie werden zu:

$$d(s=0, t) \approx \frac{1}{X_d''} e^{-\left(j + \frac{1}{T_a}\right)t} - \left(\frac{1}{X_d'} - \frac{1}{X_d}\right) e^{-\frac{t}{T_d'}} - \left(\frac{1}{X_d''} - \frac{1}{X_d'}\right) e^{-\frac{t}{T_d''}}, \quad (\text{II.11a})$$

$$q(s=0, t) \approx \frac{1}{X_q''} e^{-\left(j + \frac{1}{T_a}\right)t} - \left(\frac{1}{X_q'} - \frac{1}{X_q}\right) e^{-\frac{t}{T_q''}}. \quad (\text{II.13a})$$

Die Operatoren  $Y$ ,  $Y_R$ ,  $Y'$  und  $Y'_R$  in Gl. (7.1) mit den entsprechenden Kombinationen von  $Y_d(s, t)$ ,  $Y_q(s, t)$ ,  $Y_d(s', t)$  und  $Y_q(s', t)$  ermittelt werden. Die Ableitung des Operators  $Y_l$  bereitet keine Schwierigkeiten.

### Literatur

- [1] PARK, R. H.: Two-Reaction Theory of Synchronous Machines. AIEE-Trans. 48 (1929) S. 726.
- [2] PARK, R. H.: Two-Reaction Theory of Synchronous Machines. AIEE-Trans. 52 (1933) S. 352.
- [3] CONCORDIA, CHR.: Synchronous Machines. New York 1951.
- [4] LAIBLE, TH.: Die Theorie der Synchronmaschine im nichtstationären Betrieb. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer 1952.
- [5] AKHUNLAR, A.: Behandlung der Ausgleichvorgänge in Drehstrom-Asynchronmotoren mit Hilfe von Park-Transformation, Laplace-Transformation und Matrizenrechnung. Arch. Elektrotechn. 42 (1956) S. 4.
- [6] WAGNER, K. W.: Operatoren-Rechnung und Laplace'sche Transformation. Verlag Leipzig: J. A. Barth 1950.
- [7] HAMDİ-SEPEH: Transfer Functions of Loaded Synchronous Machines. AIEE-Transactions.
- [8] HERSCHEL: Die Laplace-Transformation und ihre Anwendung in der Regelungstechnik. München: R. Oldenbourg 1955.
- [9] HOCHRAINER, A.: Symmetrische Komponente in Drehstromsystemen. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer 1957.
- [10] LINVILLE: Starting Performance of Salient-Pole Synchronous Motors. AIEE-Transactions 49 (1930) S. 531.

Doz. Dipl.-Ing. M. CANAY, Bazenheid (St. G.), Konsumstr.



# Schaltvorgänge in Gleichstromkreisen mit nichtlinearem Widerstand und nichtlinearer Induktivität

Von  
WALTER BÖNING

(Mitteilung aus dem Rogowski-Institut für Elektrotechnik der Technischen Hochschule Aachen)

Mit 19 Textabbildungen

(Eingegangen am 29. September 1960)

**Übersicht:** Die dem Ein- und Abschaltvorgang von Spulen mit Eisenkern an Gleichspannung zugrundeliegenden Differentialgleichungen werden nach einem einheitlichen Gesichtspunkt aufgestellt und analytisch gelöst. Die im Stromkreis liegenden Widerstände können ebenfalls nichtlinear vom Halbleiter- oder Röhrentyp sein. Ströme und Spannungen werden als bezogene Größen durch Kurvenscharen dargestellt und mit entsprechenden Oszillogrammen verglichen.

## 1. Vorteile und Grenzen des analytischen Verfahrens

Stromkreise mit nichtlinearen Schaltelementen spielen heute in der gesamten Elektrotechnik, insbesondere in der Steuerungs- und Regelungstechnik, eine hervorragende Rolle. Bei der rechnerischen Behandlung derartiger Kreise stößt man häufig schon bei verhältnismäßig einfach erscheinenden Anordnungen auf große Schwierigkeiten. Die zugrundeliegenden nichtlinearen Differentialgleichungen lassen sich nur in einigen Fällen mit nicht zu großem Aufwand analytisch lösen. Wohl ist dieses Gebiet einer der Schwerpunkte der mathematischen Forschung [1], doch sind zahlreiche Differentialgleichungen wichtiger nichtlinearer Stromkreise, wie z. B. die van der Pol'sche Gleichung des Röhrenders [2] oder die Gleichung des Schwingungskreises mit gesättigter Eisendrossel [3] bis heute nicht befriedigend gelöst.

Glücklicherweise steht jedoch für die Behandlung der nichtlinearen Kreise eine große Zahl von zeichnerischen und numerischen Näherungsverfahren zur Verfügung [3], [4]. Für wichtige Aufgaben, bei denen die zeitraubende Einstellung von Funktionsgeneratoren sich lohnt, haben ferner mechanische und elektronische Analogrechner große Bedeutung erlangt. Trotz aller technischen Hilfsmittel sollte jedoch auch weiterhin versucht werden, möglichst viele nichtlineare Probleme in möglichst übersichtlicher Form wenigstens näherungsweise analytisch zu untersuchen. Man hat in jedem Falle bei der rein analytischen Lösung eine Endformel, in welche beliebige Zahlenwerte — gegebenenfalls natürlich innerhalb der durch Konvergenzkriterien gezogenen Grenzen — eingesetzt werden können. Mag der Weg zu dieser Endformel noch so mühsam sein: Er braucht nur einmal gegangen zu werden. Dagegen müssen ein zeichnerisches Verfahren sowie erst recht die Einstellung am Analogrechner bei Änderung der im Stromkreis auftretenden Kennlinien im wesentlichen neu durchgeführt werden. Dasselbe gilt für die Behandlung der Differentialgleichungen mittels eines der numerischen Lösungsverfahren. Stets wird ferner die analytische Lösung, falls überhaupt ohne allzugroße Mühe durchführbar, allen anderen Verfahren an Durchsichtigkeit überlegen sein, da die Einflüsse der auftretenden Parameter während des ganzen Rechnungsganges verfolgt werden können. Oft ist eine wenn auch nur grobe allgemeine Beziehung als Endergebnis der analytischen Rechnung für den Einblick in die physikalischen Zusammenhänge wertvoller als die numerisch, zeichnerisch oder auf dem Analogrechner gewonnene Lösung für spezielle Fälle.

Läßt man beliebig großen Arbeitsaufwand zu, so sind natürlich alle nichtlinearen Differentialgleichungen analytisch lösbar. So kann man z. B. viele derartige Gleichungen durch gewisse Lösungsansätze in Systeme von unendlich vielen linearen Differentialgleichungen überführen (Reversions- oder Umkehrverfahren [5], [6]). Ferner kommt dem Verfahren der sog. Störungsrechnung eine gewisse Bedeutung zu [7]; hiermit kann unter bestimmten Be-

dingungen durch wiederholte Anwendung eine schrittweise Genauigkeitssteigerung erreicht werden. Leider ist sowohl beim Umkehrverfahren als auch bei der Störungsrechnung in vielen Fällen die Konvergenz so schlecht, daß die Rechenarbeit zu groß und die Ergebnisse zu unübersichtlich werden. Man gelangt dann leicht zu dem Punkt, an dem das analytische Verfahren seine Berechtigung verliert.

Die im folgenden behandelten Differentialgleichungen erster Ordnung von nichtlinearen Stromkreisen mit einem Energiespeicher können durch Trennung der Veränderlichen auf Quadraturen zurückgeführt werden, und die Lösungen der so erhaltenen Integrale lassen sich durch elementare Funktionen oder verhältnismäßig einfache Reihen ausdrücken.

Für die rechnerische Behandlung nichtlinearer Stromkreise ist es notwendig, die durch Messung ermittelten Kennlinien der Schaltelemente durch Funktionsausdrücke zu ersetzen. Die Wege zu diesen „Ersatzfunktionen“ sind in einer Arbeit von FISCHER und MOSER [8] für magnetische Kennlinien sowie allgemeiner vom Verfasser [9] ausführlich dargestellt, wobei der Schwerpunkt der zuerst genannten Abhandlung bei den zeichnerischen Verfahren liegt, während in der zuletzt genannten die Ersatzfunktionen auf rechnerischem Wege ermittelt werden. Die Wahl einer der verschiedenen möglichen Ersatzfunktionen zur Nachbildung einer vorgegebenen Kennlinie hat naturgemäß einen großen Einfluß auf den Gang der Rechnung bei der Lösung der Differentialgleichung oder auf die Auswertbarkeit der Lösungsintegrale, falls sich die Differentialgleichung auf Quadraturen zurückführen läßt. Im Interesse einer einheitlichen und übersichtlichen Darstellung werden wir uns im folgenden für eine Ersatzfunktion der magnetischen Kennlinie und für eine Ersatzfunktion der Widerstandskennlinie entscheiden und diese einmal gewählten Funktionen für alle Sonderfälle beibehalten.

Es werden an dieser Stelle nur Ein- und Ausschaltvorgänge von nichtlinearen Schaltungen mit Widerstand und Induktivität behandelt. Aus der Theorie der linearen Stromkreise ist bekannt, daß die Differentialgleichungen von Kreisen mit induktivem Energiespeicher bei geeigneter Normierung der Konstanten sofort in die Differentialgleichungen der entsprechenden Kreise mit kapazitivem Energiespeicher übergehen, wenn man den Strom durch die Induktivität durch die Spannung an der Kapazität ersetzt. Die entsprechenden Schaltungen sind dual. Man kann nun zeigen, daß diese Dualität für Kreise mit nichtlinearen Schaltelementen im allgemeinen nicht mehr gilt. Eine gesonderte Untersuchung der Kreise mit kapazitivem Energiespeicher soll daher in einer späteren Arbeit vorgenommen werden.

## 2. Einschalten des nichtlinearen induktiven Kreises an Gleichspannung

### 2.1. Darstellung der Kennlinien und Aufstellung der normierten Differentialgleichung

Der in Bild 1 gezeichnete Stromkreis werde zur Zeit  $t = 0$  über den idealen Schalter  $S$  an eine Gleichspannung  $U$  gelegt. Wir fragen nach dem Verlauf des Stromes  $i$  im Zeitintervall  $t = 0$  bis  $t \rightarrow \infty$ . Für  $t < 0$  sei der Kreis energielos.  $R(i)$  ist ein im allgemeinen nichtlinearer Widerstand, der auch aus der Reihenschaltung von eigentlichen nichtlinearen Widerstandszweipolen und ohmschen Widerständen bestehen kann. Der Widerstand  $R(i)$  habe eine reguläre Kennlinie, d. h. sein differentieller Widerstand  $du/di$  sei nirgends negativ. Wir können dann zur rechnerischen Darstellung der Kennlinie in mindestens einem Quadranten die Funktion

$$u_R = k i^\beta \quad (1)$$

verwenden [9]. Gl. (1) stellt für  $\beta < 1$  eine Halbleiter-, für  $\beta > 1$  eine Röhrenkennlinie dar. In Bild 1 sei ferner  $L(i)$  eine im allgemeinen nichtlineare Induktivität mit gegebener Kennlinie  $\psi = f(i)$ , worin  $\psi$  der Augenblickswert des verketteten Flusses ist. Als Ersatzfunktion wählen wir hier den sehr anpassungsfähigen Ausdruck

$$\frac{\psi}{\psi_b} = \arctg \frac{i}{i_b}, \quad (2)$$

worin die Konstanten  $i_b$  und  $\psi_b$  aus zwei Punkten der durch Messung gegebenen magnetischen Kennlinie (Mittelkurve) bestimmt werden können [9]. Die Hysterese wollen wir zunächst vernachlässigen. Die Maschengleichung für den in Bild 1 gezeigten Kreis lautet jetzt:

$$\frac{d\psi}{dt} + k i^\beta = \frac{d\psi}{di} \frac{di}{dt} + k i^\beta = U. \quad (3)$$

Für  $t \rightarrow \infty$  ist jedenfalls  $\frac{di}{dt} = 0$ . Der stationäre Strom ist also

$$I = \left( \frac{U}{k} \right)^{\frac{1}{\beta}}. \quad (4)$$

Aus Gl. (2) folgt

$$\frac{d\psi}{di} = \frac{\psi_b i_b}{i_b^2 + i^2}. \quad (5)$$

Damit geht Gl. (3) über in

$$\frac{\psi_b i_b}{i_b^2 + i^2} \cdot \frac{di}{dt} + k i^\beta = U. \quad (6)$$

Wir suchen eine geeignete Normierung dieser Gleichung, damit die Lösung in möglichst einfacher und allgemeiner Form erscheint. Unter Verwendung des stationären Stroms (4) läßt sich Gl. (6) wie folgt schreiben:

$$1 + \left( \frac{i}{i_b} \right)^2 \cdot \left( \frac{i}{I} \right)^2 \frac{d \frac{i}{I}}{dt} + \left( \frac{i}{I} \right)^\beta = 1. \quad (7)$$

Wir führen dimensionslose Veränderliche ein:

$$\frac{i}{I} = x; \quad t \cdot \frac{U i_b}{I \psi_b} = \tau, \quad (8)$$

sowie die Abkürzung

$$\frac{I}{i_b} = \alpha. \quad (9)$$

Je größer der stationäre Strom  $I$  im Vergleich zu der Kennlinienkonstante  $i_b$  ist, desto weiter ist die magnetische Kennlinie in das Sättigungsgebiet hinein angesteuert. Man kann daher  $\alpha$  anschaulich als „Sättigungszahl“ bezeichnen. Gl. (7) nimmt jetzt die folgende übersichtliche Gestalt an:

$$\frac{1}{1 + \alpha^2 x^2} \frac{dx}{d\tau} + x^\beta = 1, \quad (10)$$

mit der Anfangsbedingung  $\tau = 0; x = 0$ . Gl. (10) gilt für den in Bild 1 gezeichneten Gleichstromkreis mit nichtlinearem Widerstand und nichtlinearer Induktivität bei Vernachlässigung der Hysterese. Bevor wir Gl. (10) allgemein lösen, betrachten wir Sonderfälle:

a) Induktivität und Widerstand linear. Hierfür ist der Widerstandsexponent  $\beta = 1$ ; ferner geht die magnetische Kennlinie Gl. (2) in eine Gerade über für  $\psi_b \rightarrow \infty; i_b \rightarrow \infty$  und nimmt die Form

$$\psi = \frac{\psi_b}{i_b} \cdot i = L i \quad (11)$$

an, da der arcus tangens für kleine Argumentwerte gleich dem Argument wird. Darin ist  $L$  die nunmehr stromunabhängige Induktivität des Kreises. In Gl. (4) ist  $k$  identisch mit dem ohmschen Widerstand  $R$ :

$$I = \frac{U}{R} \quad (4a)$$

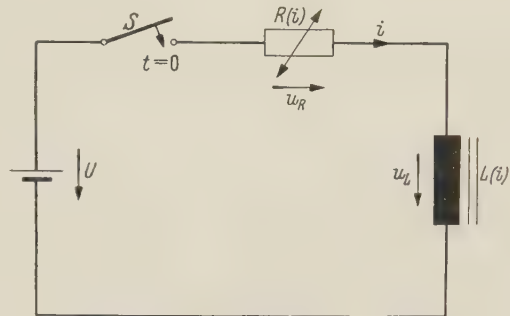


Bild 1. Einschalten einer Spule mit Eisenkern über einen nichtlinearen Widerstand an Gleichspannung.



und in Gl. (8) und (9) erhält man  $\tau = t \cdot \frac{R}{L}$ ;  $\alpha = 0$ . Damit nimmt also die normierte Gleichung (10) für den rein linearen Fall die äußerst einfache Gestalt

$$\frac{dx}{d\tau} + x = 1 \quad (12)$$

an mit der wohlbekannten Lösung

$$\tau = \int_0^x \frac{dx}{1-x} = \ln \frac{1}{1-x}; \quad x = 1 - e^{-\tau}, \quad (13)$$

oder

$$i = \frac{U}{R} (1 - e^{-t \cdot R/L}).$$

b) Induktivität nichtlinear, Widerstand linear. Hier ist lediglich  $\beta = 1$ ,  $I = U/R$ , und Gl. (10) geht über in

$$\frac{1}{1 + \alpha^2 x^2} \cdot \frac{dx}{d\tau} + x = 1, \quad (14)$$

wobei aus der unabhängigen Veränderlichen Gl. (8)

$$\tau = t \cdot R \cdot \frac{i_b}{\psi_b} \quad (14a)$$

wird.

c) Induktivität linear, Widerstand nichtlinear. Es ist hier:

$$\alpha = 0; \quad \tau = t \cdot \frac{U}{I L} \quad (15a)$$

und Gl. (10) nimmt folgende Gestalt an:

$$\frac{dx}{d\tau} + x^\beta = 1. \quad (15)$$

Mit der Lösung der Differentialgleichungen (10), (14) und (15) wollen wir uns in den nächsten Abschnitten befassen.

## 2.2. Nichtlineare Induktivität und linearer Widerstand

### 2.2.1. Vernachlässigung der Hysterese

Hier gilt die Differentialgleichung (14). Durch Trennung der Veränderlichen erhält man mit den Anfangsbedingungen  $\tau = 0$ ;  $x = 0$  (Kreis zur Zeit  $t = 0$  energielos):

$$\tau = \int_0^x \frac{dx}{(1-x)(1 + \alpha^2 x^2)}. \quad (16)$$

Nach elementarer Integration durch Partialbruchzerlegung und Einsetzen der Grenzen findet man:

$$\tau = \frac{1}{1 + \alpha^2} \left[ \ln \frac{\sqrt{1 + \alpha^2 x^2}}{1-x} + \alpha \operatorname{arc} \operatorname{tg} \alpha x \right], \quad (17)$$

worin gemäß Gl. (8) und (9)

$$\tau = t \cdot \frac{R i_b}{\psi_b}; \quad x = \frac{i}{I}; \quad \alpha = \frac{I}{i_b} \quad (17a)$$

ist. Gl. (17) geht übrigens für  $\alpha \rightarrow 0$  sofort in die lineare Lösung Gl. (13) über.

In Gl. (17) steht die gesuchte Lösung als Umkehrfunktion  $\tau = f(x)$  oder  $t = f(i)$ . Für die zahlenmäßige Auswertung ist das natürlich unwesentlich. Die Beziehung  $i = f_1(t)$  läßt sich aus Gl. (17) in geschlossener Form nicht herstellen.

Die normierte Gl. (17) enthält als einzigen Parameter die Sättigungszahl  $\alpha$ . Eine Schar von Lösungskurven zeigt Bild 2. Die Kurve  $\alpha = 0$  entspricht dem rein linearen Stromkreis. Mit zunehmender Größe von  $\alpha$  wird das Auftreten eines Wendepunktes immer ausgeprägter. Aus Bild 2 lassen sich durch einfache Maßstabsänderung und Interpolation zwischen den Kurven alle Sonderfälle im Bereich  $0 \leq \alpha \leq 20$  ermitteln.

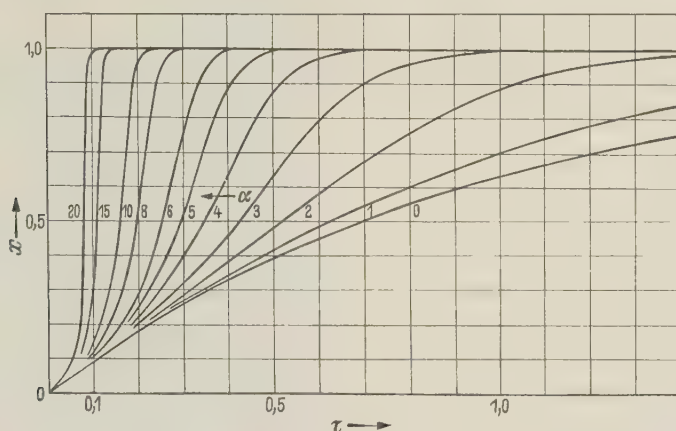


Bild 2. Einschalten einer Spule mit Eisenkern über einen ohmschen Widerstand an Gleichspannung. Verlauf des bezogenen Stromes  $x = i/I$  über der bezogenen Zeit  $\tau = t R i_b / \psi_b$  für verschiedene Sättigungszahlen  $\alpha = I/i_b$ .

Zum Vergleich zwischen Rechnung und Messung wurde eine Spule mit einem Kern aus kornorientiertem Transformatorenblech nacheinander über verschiedene ohmsche Widerstände an Gleichspannung geschaltet. Die Höhe der Spannung wurde jedesmal so eingestellt, daß der stationäre Strom  $I = 0,7 \text{ A}$  betrug. Die mit 50 Hz aufgenommene magnetische Kennlinie der Spule ließ sich im untersuchten Bereich in guter Näherung durch die Ersatzfunktion arcus tangens, Gl. (2), mit

$$i_b = 0,00767 \text{ A}; \quad \psi_b = 2,18 \text{ Vs}$$

darstellen. Für die Meßreihe ergibt sich also ein fester Wert der Sättigungszahl

$$\alpha = \frac{I}{i_b} = 91,3.$$

Aus Gl. (17) wird damit:

$$\tau = 1,2 \cdot 10^{-4} \left[ \ln \frac{\sqrt{1 + 8336 x^2}}{1 - x} + 91,3 \arctan 91,3 x \right]$$

und aus (17a):

$$\frac{t}{s} = \tau \cdot \frac{284}{R/\Omega}.$$

Hieraus kann der Strom über der Zeit für die verschiedenen Widerstandswerte berechnet werden. In Bild 3 sind die rechnerisch ermittelten Verläufe den gemessenen gegenübergestellt.

Vergleicht man die Stellen des steilsten Anstiegs, so findet man eine Abweichung der gemessenen Verläufe von den gerechneten zwischen  $(-15)$  und  $(-17)\%$ . Der Strom steigt also etwas schneller an, als nach dem Ergebnis der Rechnung zu erwarten war. Das liegt an den der Rechnung zugrundegelegten vereinfachenden Annahmen. Wir haben als beim Einschaltvorgang durchlaufene magnetische Kennlinie die Mittelkurve der mit 50 Hz durchlaufenen Hystereseschleife angenommen. In Wirklichkeit dürfte die durchlaufene Kurve nicht unerheblich davon abweichen. Außer dem Einfluß der Hysterese muß ein merklicher Einfluß der magnetischen Nachwirkung vermutet werden. Besonders deshalb gilt Gl. (17)

mit einiger Genauigkeit natürlich nur für nicht zu schnell verlaufende Vorgänge. Im nächsten Abschnitt soll gezeigt werden, daß sich für solche Vorgänge durch Einbeziehung der Hysterese eine Genauigkeitssteigerung erreichen läßt.

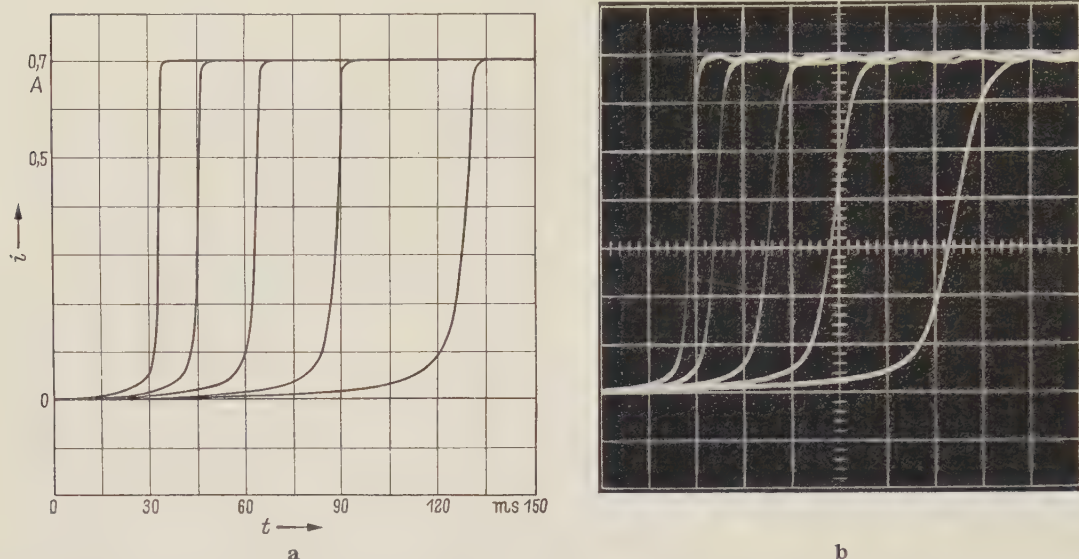


Bild 3. Einschalten einer Spule mit Kern aus kornorientiertem Transformatorblech über verschiedene ohmsche Widerstände an Gleichspannung bei hoher Sättigungszahl ( $\alpha = 91,3$ ). a) die nach Gl. (17) berechneten Einschaltströme, b) zum Vergleich die entsprechenden oszilloskopierten Verläufe im gleichen Maßstab.

### 2.2.2. Berücksichtigung der Hysterese

Wenn außer der zuletzt genannten Bedingung die Aussteuerung der magnetischen Kennlinie, in unserem Fall also der stationäre Gleichstrom bekannt ist, so kann man bei der Rechnung die Hystereseschleife berücksichtigen durch folgende Abänderung der Ersatzfunktion Gl. (2):

$$\frac{\psi}{\psi_b} = \arctg \frac{i - i_k}{i_b} \quad (2a)$$

[9], worin  $i_k$  ein Maß für die Breite der Hystereseschleife ist. Dabei bedeutet ein positiver Wert von  $i_k$  ein Durchlaufen des rechten, ein negativer Wert von  $i_k$  dagegen ein Durchlaufen des linken Astes der Schleife.

Die Differentialgleichung des Schaltvorgangs Bild 1 lautet bei linearem Widerstand

$$\frac{d\psi}{di} \cdot \frac{di}{dt} + R i = U. \quad (18)$$

Oder wegen  $di = d(i - i_k)$ :

$$\frac{d\psi}{d(i - i_k)} \frac{d(i - i_k)}{dt} + R(i - i_k) = U - R i_k. \quad (19)$$

Setzt man

$$\frac{i - i_k}{I} = y; \quad t \cdot \frac{R i_b}{\psi_b} = \tau, \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{I}{i_b} &= \alpha \text{ (Sättigungszahl)}, \\ -\frac{i_k}{I} &= y_0 \text{ (Hysteresezahl)}, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

so läßt sich Gl. (19) in folgender Gestalt schreiben:

$$\frac{1}{1 + \alpha^2 y^2} \frac{dy}{d\tau} + y = 1 + y_0. \quad (22)$$



Da zur Zeit  $t = 0$  der Fluß im unteren oder oberen Remanenzpunkt liegt und sich nicht sprunghaft ändern kann, gilt die Anfangsbedingung

$$\tau = 0; \quad i = 0; \quad \text{d. h.} \quad y = y_0. \quad (23)$$

Wir bemerken, daß sich Gl. (22) von der die Hysterese außer acht lassenden Gl. (14) nur durch die zusätzliche Konstante  $y_0$  auf der rechten Seite unterscheidet. Ein wesentlicher Unterschied liegt allerdings in der Anfangsbedingung (23). Bei Vernachlässigung der Hysterese hatten beide Variablen zu Beginn des Vorgangs den Wert Null.

Aus Gl. (22) folgt durch Trennung der Veränderlichen und unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung (23):

$$\tau = \int_{y_0}^y \frac{dy}{(1 + y_0 - y)(1 + \alpha^2 y^2)}. \quad (24)$$

Nach Integration und Einsetzen der Grenzen erhält man

$$\tau = \frac{1}{1 + \alpha^2 (1 + y_0)^2} \left[ \ln \left( \frac{1}{1 + y_0 - y} \sqrt{\frac{1 + \alpha^2 y^2}{1 + \alpha^2 y_0^2}} \right) + \alpha (1 + y_0) (\arctg \alpha y - \arctg \alpha y_0) \right]. \quad (25a)$$

Für die zahlenmäßige Auswertung ist es bequemer, wenn man statt der Veränderlichen  $y = (i - i_k)/I$  wieder die Veränderliche  $x = i/I$  einführt. Aus Gl. (20) und (21) erkennt man, daß  $y = x + y_0$  ist. Damit kommt aus (25a):

$$\tau = \frac{1}{1 + \alpha^2 (1 + y_0)^2} \left\{ \ln \left( \frac{1}{1 - x} \sqrt{\frac{1 + \alpha^2 (x + y_0)^2}{1 + \alpha^2 y_0^2}} \right) + \alpha (1 + y_0) [\arctg \alpha (x + y_0) - \arctg \alpha y_0] \right\}, \quad (25)$$

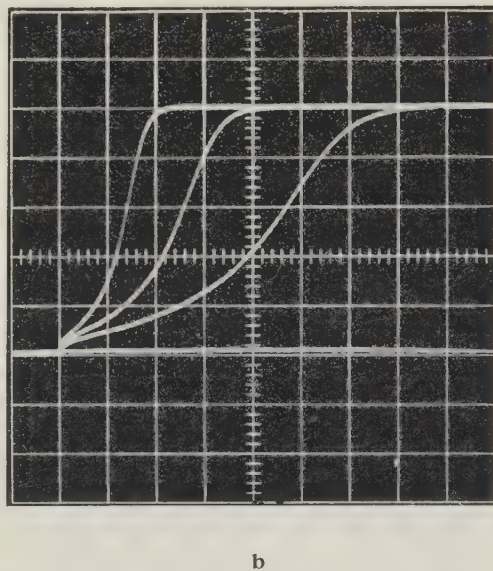
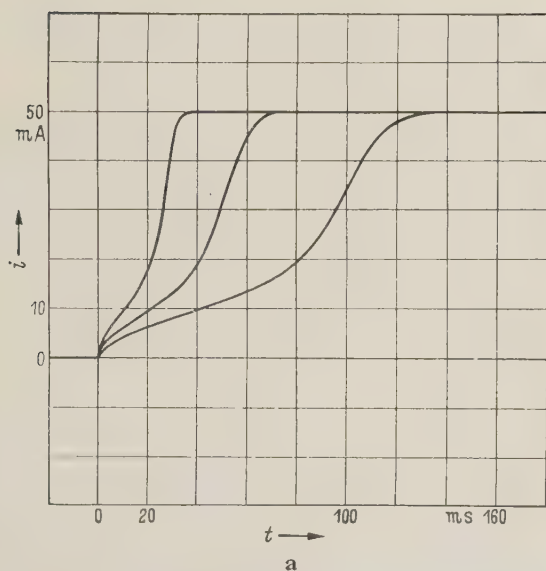


Bild 4. Einschalten der gleichen Spule wie in Bild 3 bei kleiner Sättigungszahl ( $\alpha = 7,07$ ) über verschiedene ohmsche Widerstände. a) die unter Berücksichtigung der Hysterese berechneten Ströme, b) im gleichen Maßstab das entsprechende Oszillogramm.

als Lösung unseres Einschaltproblems unter Berücksichtigung der Hysterese. Wir fassen noch einmal die in Gl. (25) enthaltenen Abkürzungen zusammen:

$$\tau = t \cdot \frac{R i_b}{\psi_b}; \quad x = \frac{i}{I}; \quad \alpha = \frac{I}{i_b}; \quad y_0 = -\frac{i_k}{I}. \quad (26)$$

Im Gegensatz zur einfacheren Lösung (17) ohne Hysterese enthält Gl. (25) zwei Parameter, nämlich  $\alpha$  und  $y_0$ .

Wir wenden Gl. (25) auf ein Beispiel an. Eine Spule mit der bei 50 Hz gemessenen Hystereseschleife

$$\frac{\psi}{V_s} = 2,13 \arctan \frac{\frac{i}{\text{mA}} \pm 8,5}{7,07} \quad (27)$$

wurde nacheinander über ohmsche Widerstände von 4600, 2400 und 1250 Ohm an Gleichspannung gelegt, wobei stets bis zu einem stationären Strom von 50 mA angesteuert wurde. Der Remanenzfluß wurde jedesmal so eingestellt, daß während des Einschaltvorgangs der rechte Ast der Hystereseschleife durchlaufen wurde. In der Kennliniengleichung (27) ist also entsprechend Gl. (2a):

$$\psi_b = 2,13 \text{ Vs}; \quad i_b = 7,07 \text{ mA}; \quad i_k = 8,5 \text{ mA}.$$

Ferner ist  $I = 50 \text{ mA}$ . Mit diesen Werten findet man mit Gl. (26):

$$\frac{i}{\text{mA}} = 50 x; \quad \frac{t}{s} = \tau \cdot \frac{304}{R/\Omega}; \quad \alpha = 7,07; \quad \gamma_0 = -0,17.$$

Damit läßt sich aus Gl. (25) die Zeit als Funktion des Stromes für die drei verschiedenen Widerstandswerte berechnen. Aufgetragen ist in Bild 4 wie üblich umgekehrt der Strom über der Zeit. Der Vergleich mit dem Oszillogramm zeigt eine gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung.

### 2.3. Stromkreis mit nichtlinearem Widerstand und linearer Induktivität

Die hierfür geltende Differentialgleichung (15) führt nach Trennung der Veränderlichen mit der Anfangsbedingung  $\tau = 0$ ,  $x = 0$  auf das bestimmte Integral

$$\tau = \int_0^x \frac{d\xi}{1 - \xi^\beta}, \quad (28)$$

worin zur Unterscheidung von der oberen Grenze  $x$  die Integrationsvariable mit  $\xi$  bezeichnet ist. Setzt man  $\beta = m/n$ , so läßt sich das Integral durch die Substitution  $\xi = z^n$  in das Integral einer rationalen Funktion überführen und durch Teilbruchzerlegung integrieren. Dieses Verfahren führt jedoch bei großen Werten von  $m$  zu verwickelten Ausdrücken. Wir schlagen daher einen anderen Weg ein. Durch die Substitution

$$\xi^\beta = 1 - z^\beta; \quad d\xi = -z^{\beta-1} (1 - z^\beta)^{\frac{1}{\beta}-1} dz \quad (29)$$

geht Gl. (28) über in

$$\tau = \int_{z=x}^0 (1 - z^\beta)^{\frac{1}{\beta}-1} \cdot \frac{dz}{z}. \quad (30)$$

Hier kann man nach dem binomischen Satz entwickeln und erhält:

$$\tau = \int_{z=x}^0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\frac{1}{\beta}-1}{k} z^{k\beta-1} dz. \quad (31)$$

Da  $\xi$  im Intervall  $0 \leq \xi \leq 1$  liegt und damit wegen Gl. (29) auch  $0 \leq z \leq 1$  ist, konvergiert die Reihe (31) für alle Werte von  $z$  bis auf  $z = 1$  und darf daher gliedweise integriert werden. Nach Ausführung der Integration, Rücksubstitution und Einsetzen der Grenzen folgt als Ergebnis:

$$\tau = \frac{1}{\beta} \ln \frac{1}{1 - x^\beta} + \frac{1}{\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \binom{\frac{1}{\beta}-1}{k} [1 - (1 - x^\beta)^k], \quad (32)$$

mit den Abkürzungen

$$\tau = t \cdot \frac{U}{IL}; \quad x = \frac{i}{I}. \quad (32a)$$

Gl. (32) geht im rein linearen Fall  $\beta = 1$  sofort in die einfache Beziehung (13) über. Ferner nimmt sie eine besonders einfache Gestalt an, falls der Kehrwert  $1/\beta$  des Widerstandsexponenten eine ganze Zahl ist. Dann bricht nämlich die Reihe (32) von selbst ab, sobald  $k > \frac{1}{\beta} - 1$  wird. Für  $\beta = 1/2$  lautet z. B. die Lösung:

$$\tau = 2 \ln \frac{1}{1 - \sqrt{x}} - 2 \sqrt{x}. \quad (33)$$

Für  $\beta = 1/3$ :

$$\tau = 3 \ln \frac{1}{1 - \sqrt[3]{x}} - 6 \sqrt[3]{x} + \frac{3}{2} \left[ 1 - \left( 1 - \sqrt[3]{x} \right)^2 \right] \quad (34)$$

und für  $\beta = 1/5$  mit der Abkürzung  $y = 1 - \sqrt[5]{x}$ :

$$\tau = 5 \ln \frac{1}{y} - 20 (1 - y) + 15 (1 - y^2) - \frac{20}{3} (1 - y^3) + \frac{1}{4} (1 - y^4). \quad (35)$$

Falls  $1/\beta$  keine ganze Zahl ist, erhält man in der Entwicklung (32) Binomialkoeffizienten von Brüchen; Gl. (32) wird damit zur unendlichen Reihe, deren Konvergenz aber für  $\beta < 1$  (Halbleiter-Widerstand) hinreichend gut ist, solange man mit  $x$  nicht zu nahe an Eins herangeht. Für  $x = 1$  liefert Gl. (32) den Wert  $\tau = \infty$ , wie es sein muß.

Für  $\beta > 1$  (Röhrenkennlinien) wird die Konvergenz der Reihe (32) jedoch sehr schlecht. In diesem Fall ist eine andere Reihenentwicklung des Integranden in Gl. (28) vorteilhafter. Durch Division folgt nämlich:

$$\frac{1}{1 - x^\beta} = 1 + x^\beta + x^{2\beta} + x^{3\beta} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k\beta}. \quad (36)$$

Diese Reihe konvergiert für  $|x| < 1$  um so besser, je größer der Widerstandsexponent  $\beta$  ist. Durch gliedweise Integration zwischen 0 und  $x$  erhält man

$$\tau = x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k\beta}}{1 + k\beta}. \quad (37)$$

Für große Werte von  $\beta$  ( $\beta > 5$ ) benötigt man zur Berechnung des Stromverlaufs nur eine sehr geringe Anzahl von Gliedern der Reihe (37), falls man mit  $x$  nicht zu nahe an Eins kommt. Auch die Beziehung (37) geht für  $\beta = 1$  in die einfache Lösung (13) über. In diesem Falle wird nämlich aus (37):

$$\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{1+k}}{1+k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \ln \frac{1}{1-x}.$$

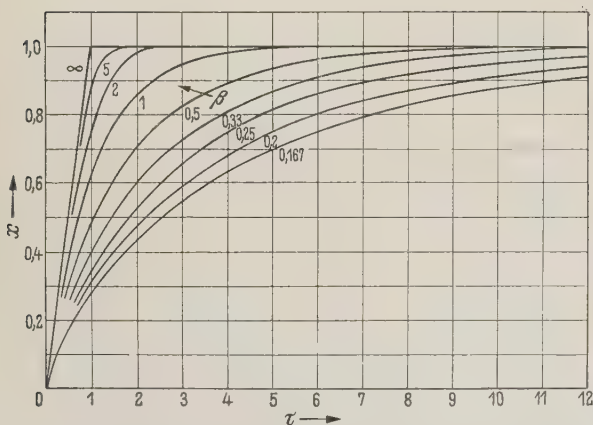


Bild 5. Einschalten einer linearen Induktivität über nichtlinearen Widerstände vom Halbleiter- ( $\beta < 1$ ) und Röhrentyp ( $\beta > 1$ ) an Gleichspannung. Aufgetragen ist der bezogene Strom  $x = i/I$  über der bezogenen Zeit  $\tau = t U / I L$  mit verschiedenen Widerstandsexponenten  $\beta$  als Parameter.

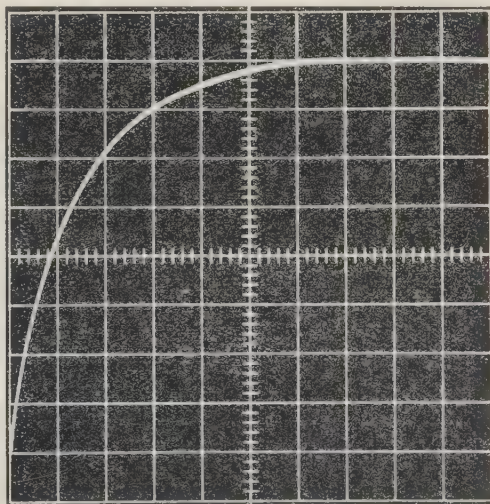


Bild 6. Gemessener Einschaltstrom einer Spule konstanter Induktivität  $L = 2$  Hy mit vorgeschaltetem Halbleiter-Widerstand (Exponent  $\beta = 0,25$ ). Seitenlänge der Rasterquadrate: waagrecht 2 ms, senkrecht 5 mA. Zahlenmäßiger Vergleich mit der entsprechenden berechneten Kurve im Text.



In Bild 5 sind einige Verläufe des bezogenen Stromes für verschiedene Werte des Widerstandsexponenten  $\beta$  aufgetragen. Zur Nachprüfung dieser berechneten Kurven wurde eine eisenlose Spule mit der Induktivität  $L = 2 \text{ Hy}$  über einen Widerstand mit der Kennlinie

$$\frac{u_R}{V} = 26 \cdot (i/\text{mA})^{0,25}$$

eingeschaltet, also mit  $\beta = 0,25$  und  $k = 26 \text{ V mA}^{-0,25}$ . Der stationäre Strom betrug dabei  $I = 40 \text{ mA}$ . Daraus folgt:

$$U = 26 \cdot 40^{0,25} \text{ V} = 65,5 \text{ V}; \quad t = \tau \cdot \frac{I \cdot L}{U} = \tau \cdot 1,22 \text{ ms}.$$

Den oszillografierten Einschaltstrom zeigt Bild 6. Vergleicht man zur quantitativen Prüfung der Theorie die Zeit, in der der Strom den halben stationären Wert erreicht, so findet man in Bild 5 auf der Kurve für  $\beta = 0,25$ :

$$\tau_{x=0,5} = 1,8; \quad t_{x=0,5} = 1,8 \cdot 1,22 \text{ ms} = 2,2 \text{ ms}.$$

Im Oszillogramm dagegen liest man ab:  $t_{x=0,5} = 1,9 \text{ ms}$ , so daß also die Abweichung zwischen Rechnung und Messung in diesem Punkt 16% des gemessenen Wertes beträgt.

#### 2.4. Stromkreis mit nichtlinearem Widerstand und nichtlinearer Induktivität

Die Differentialgleichung (10) des in Bild 1 gezeichneten Kreises gilt jetzt in voller Allgemeinheit. Sie läßt sich schreiben:

$$\frac{dx}{d\tau} = (1 - x^\beta) (1 + \alpha^2 x^2),$$

und führt demnach auf folgende Quadratur:

$$\tau = \int_0^x \frac{dx}{(1 - x^\beta) (1 + \alpha^2 x^2)}. \quad (38)$$

Zur Auswertung dieses Integrals sind wir auf das im vorigen Unterabschnitt erwähnte allgemeine Verfahren angewiesen. Dazu drücken wir  $\beta$  aus als Quotienten zweier natürlicher Zahlen

$$\beta = \frac{m}{n}$$

und substituieren in Gl. (38):

$$x = z^n; \quad dx = n z^{n-1} dz. \quad (39)$$

Für  $\tau$  erhält man damit den Ausdruck

$$\tau = \int_0^z \frac{n z^{n-1} dz}{(1 - z^m) (1 + \alpha^2 z^{2n})}. \quad (40)$$

Setzen wir zunächst  $\alpha \neq 0$  voraus, so steht jetzt unter dem Integralzeichen für alle Werte der natürlichen Zahlen  $m$  und  $n$  eine echt gebrochene rationale Funktion, die in Teilbrüche zerlegt werden kann. Wir nehmen zunächst an, daß  $m$  eine ungerade Zahl sei. Dann findet man durch Zusammenfassung der konjugiert komplexen Wurzelpaare für die Klammerausdrücke des Nenners folgende Produktdarstellung:

$$\begin{aligned} 1 - z^m &= (1 - z) \prod_{\mu=1}^{\frac{m-1}{2}} \left( z - e^{j \frac{2\mu}{m} \pi} \right) \left( z - e^{-j \frac{2\mu}{m} \pi} \right), \\ &= (1 - z) \prod_{\mu=1}^{\frac{m-1}{2}} \left( z^2 - 2z \cos \frac{2\mu}{m} \pi + 1 \right) \quad (m \text{ ungerade}), \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} 1 + \alpha^2 z^{2n} &= \prod_{\nu=1}^n \left( \alpha^{1/n} z - e^{j \frac{2\nu-1}{2n} \pi} \right) \left( \alpha^{1/n} z - e^{-j \frac{2\nu-1}{2n} \pi} \right), \\ &= \prod_{\nu=1}^n \left( \alpha^{2/n} z^2 - 2 \alpha^{1/n} z \cos \frac{2\nu-1}{2n} \pi + 1 \right). \end{aligned} \quad (42)$$

Nach einiger Rechnung erhält man hieraus die Partialbruchdarstellung:

$$\frac{n z^{n-1}}{(1-z^m)(1+\alpha^2 z^{2n})} = \frac{a_0}{1-z} + \sum_{\mu=1}^{\frac{m-1}{2}} \frac{a_\mu z + b_\mu}{z^2 - 2z \cos \frac{2\mu\pi}{m} + 1} + \sum_{\nu=1}^n \frac{\alpha^{2/n} p_\nu z + \alpha^{1/n} q_\nu}{\alpha^{2/n} z^2 - 2\alpha^{1/n} z \cos \frac{2\nu-1}{2n}\pi + 1}, \quad (43)$$

mit den Koeffizienten:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\beta} \frac{1}{1+\alpha^2}; & a_\mu &= -\frac{2}{\beta} \cos \frac{2\mu\pi}{\beta} \cdot \frac{1+\alpha^2}{1+2\alpha^2 \cos \frac{4\mu\pi}{\beta} + \alpha^4}, \\ b_\mu &= \frac{2}{\beta} \cdot \frac{\cos \frac{n-1}{m} 2\mu\pi + \alpha^2 \cos \frac{n+1}{m} 2\mu\pi}{1+2\alpha^2 \cos \frac{4\mu\pi}{\beta} + \alpha^4}, \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

$$\left. \begin{aligned} p_\nu &= (-1)^{\nu+1} \alpha^{\frac{m-n}{n}} \cdot \frac{\sin(2\nu-1)\frac{\pi}{2}}{1-2\alpha^\beta \cos \frac{2\nu-1}{2}\beta\pi + \alpha^{2\beta}}, \\ q_\nu &= (-1)^\nu \alpha^{\frac{m-n}{n}} \cdot \frac{\sin \frac{m+1}{n} (2\nu-1) \frac{\pi}{2} - \alpha^\beta \sin \frac{2\nu-1}{2n}\pi}{1-2\alpha^\beta \cos(2\nu-1)\frac{\pi}{2} + \alpha^{2\beta}}. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Nach gliedweiser Integration von Gl. (43) und Rücksubstitution gemäß Gl. (39) ergibt sich schließlich als Lösung für ungerade  $m$ :

$$\begin{aligned} \tau &= a_0 \ln \frac{1}{1-x^{1/n}} + \sum_{\mu=1}^{\frac{m-1}{2}} \frac{a_\mu \cos \frac{2\mu\pi}{m} \pi + b_\mu}{\sin \frac{2\mu\pi}{m} \pi} \left[ \arctg \frac{x^{1/n} - \cos \frac{2\mu\pi}{m} \pi}{\sin \frac{2\mu\pi}{m} \pi} + \frac{m-4\mu}{m} \frac{\pi}{2} \right] \\ &+ \frac{a_\mu}{2} \ln \left( x^{2/n} - 2x^{1/n} \cos \frac{2\mu\pi}{m} \pi + 1 \right) \\ &+ \sum_{\nu=1}^n \frac{p_\nu \cos \frac{2\nu-1}{2n} \pi + q_\nu}{\sin \frac{2\nu-1}{2n} \pi} \left[ \arctg \frac{(\alpha x)^{1/n} - \cos \frac{2\nu-1}{2n} \pi}{\sin \frac{2\nu-1}{2n} \pi} + \frac{n-2\nu-1}{2n} \pi \right] \\ &+ \frac{p_\nu}{2} \ln \left[ (\alpha x)^{2/n} - 2(\alpha x)^{1/n} \cos \frac{2\nu-1}{2n} \pi + 1 \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

Falls  $m$  eine gerade Zahl ist, hat man in Gl. (46) lediglich  $a_0 = 0$  zu setzen und die  $\mu$ -Summe von 1 bis  $m/2$  zu erstrecken. Die Koeffizienten  $a_\mu$ ,  $b_\mu$  und  $p_\nu$ ,  $q_\nu$  ändern sich dabei nicht.

Die Lösung (46) für den allgemeinen Fall nichtlinearen Widerstandes und nichtlinearer Induktivität enthält die bisher behandelten Sonderfälle (ohne Berücksichtigung der Hysterese) mit einer Einschränkung: Für  $\alpha = 0$  nämlich ist die linke Seite der Gl. (43) nur dann eine echt gebrochene rationale Funktion, wenn  $m \geq n$  ist, d. h.  $\beta \geq 1$ . Die Partialbruchzerlegung und damit die Lösung (46) gelten also im Sonderfall der eisenlosen Spule nur für Widerstandskennlinien vom Röhrentyp. Es wird dann in Gl. (45)  $p_\nu = q_\nu = 0$ , die Lösung (46) besteht für  $\alpha = 0$  also nur aus  $a_0$ -Glieder und  $\mu$ -Summe, wobei deren Koeffizienten sich sehr vereinfachen. Man erhält dieselbe Beziehung, als wenn man die für lineare Induktivität gültige Gl. (28) unmittelbar nach entsprechender Substitution durch Partialbruchzerlegung integriert hätte. Die gleichfalls für  $\beta > 1$  geltende Reihe (37) führt jedoch in den allermeisten Fällen schneller zum Ziel.

Die zahlenmäßige Auswertung der Lösung (46) vereinfacht sich erheblich, wenn  $m = 1$ , also  $\beta$  ein Bruch der Form  $1/n$  ist. Dann verschwindet nämlich die ganze  $\mu$ -Summe. Für die meisten Halbleiter-Widerstände kann man die Ersatzfunktion Gl. (1) so wählen, daß  $\beta$  ein Bruch der genannten Eigenschaft wird. Für  $m = n = \beta = 1$  geht Gl. (46) ohne Schwierigkeit in Gl. (17) über.

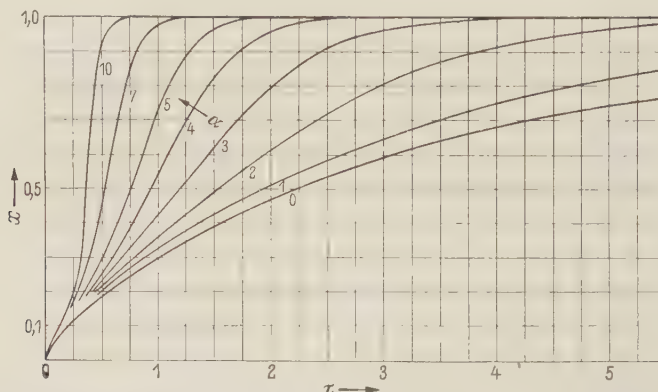


Bild 7. Einschalten einer Spule mit Eisenkern über einen Halbleiter-Widerstand mit dem Exponenten  $\beta = 0,2$  an Gleichspannung. Verlauf des bezogenen Stromes  $x = i/I$  über der bezogenen Zeit  $\tau = t U i_b / I \psi_b$  für verschiedene Sättigungszahlen  $\alpha$ .

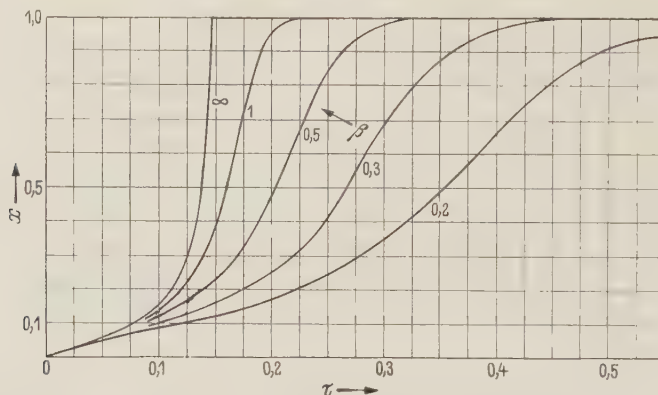


Bild 8. Einschalten einer Spule mit Eisenkern über nichtlineare Widerstände mit verschiedenen Exponenten  $\beta$ . Die Sättigungszahl beträgt für alle Kurven  $\alpha = 10$ .

Die Bilder 7 und 8 zeigen zwei Beispiele für die zahlenmäßige Auswertung der Gl. (46). In Bild 7 sind für einen festen Wert  $\beta$  des Widerstandsexponenten einige Kurven des bezogenen Einschaltstromes mit verschiedenen Sättigungszahlen  $\alpha$  als Parameter aufgetragen. In Bild 8 wurde umgekehrt  $\alpha$  festgehalten und  $\beta$  als Parameter verwendet. In Bild 7 erkennt man, daß der bezogene Einschaltstrom für  $\alpha = 3$  in einem weiten Bereich linear ansteigt. Zum Vergleich zwischen Rechnung und Messung wurde eine Spule mit Eisenkern über einen spannungsabhängigen Widerstand mit dem Exponenten  $\beta = 0,2$  an Gleichspannung gelegt und der Verlauf des Einschaltstromes oszillographiert (Bild 9). Der stationäre Strom betrug  $I = 24$  mA. Die Kennlinien der beiden nichtlinearen Schaltelemente genügten in guter Näherung den Beziehungen (1) und (2), wobei sich folgende Kennlinienkonstanten ergaben:

$$\beta = 0,2; \quad k = 26 \text{ V mA}^{-0,2}; \quad i_b = 7,07 \text{ mA}; \quad \psi_b = 2,13 \text{ Vs}.$$

Damit ist  $\alpha = I/i_b = 3,4$ . Der Einschaltstrom zeigt den theoretisch erwarteten linearen Anstieg. Ein darüber hinaus angestellter zahlenmäßiger Vergleich zeigt, daß der gemessene Strom z. B. im Punkt  $i = 15$  mA, also  $x = 15/24 = 0,625$ , zeitlich um  $\pm 10\%$  vom berechneten Verlauf abweicht. Interpolation in Bild 7 ergibt nämlich für  $\alpha = 3,4$  und  $x = 0,625$  den Zeitpunkt  $t = \tau \cdot I \psi_b / U i_b = \tau \cdot 147 \text{ ms} = 200 \text{ ms}$ , während im Oszillogramm 220 ms abzulesen sind.



Einen anderen Einschaltvorgang für einen großen Wert von  $\beta$  zeigt Bild 10. Hier wurde eine Spule mit den Kennliniengrößen  $i_b = 9,17$  mA,  $\psi_b = 2,1$  Vs über eine Pentode mit  $k = 8,14 \cdot 10^{-21}$  V mA $^{-9,6}$  und  $\beta = 9,6$  bei einem stationären Strom von  $I = 250$  mA, entsprechend einer Spannung  $U = 1000$  V, eingeschaltet. Der Stromverlauf ist qualitativ der gleiche wie in Bild 8 für  $\beta = \infty$ . Eine genauere Übereinstimmung ist hier nicht zu erwarten, da im Oszillogramm Bild 10  $\alpha = 27,3$  ist, während die Kurvenschar Bild 8 für  $\alpha = 10$  gilt.

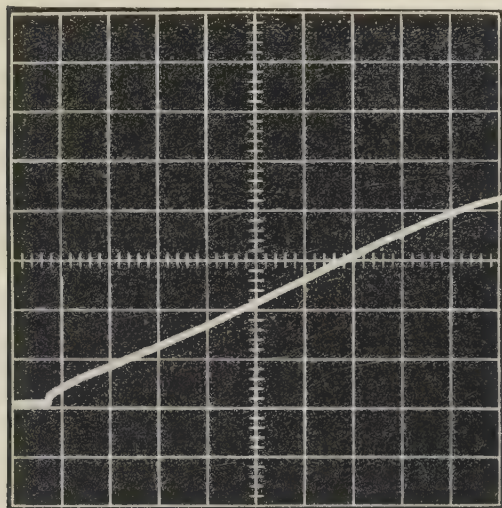


Bild 9. Der in Bild 7 gezeigte berechnete Einschaltstrom für  $\alpha = 3$ ;  $\beta = 0,2$  ist hier an einer entsprechenden Schaltung oszillographiert. Rasterquadrat  $20 \text{ ms} \times 10 \text{ mA}$ .

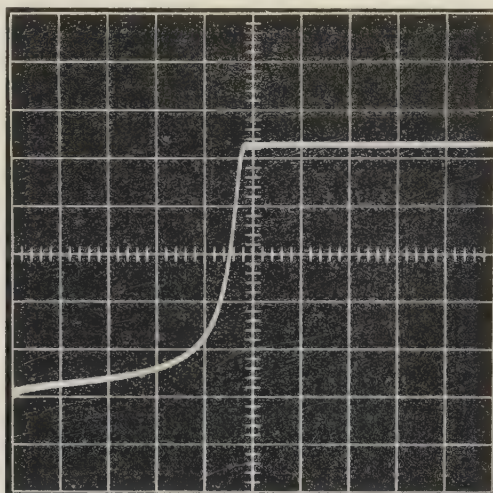


Bild 10. Oszillogramm des Stromes in einer Eisenkernspule (Sättigungszahl  $\alpha = 27,3$ ) bei Einschalten an Gleichspannung über eine Sendepentode (Widerstandsexponent  $\beta = 9,6$ ). Maßstäbe: waagerecht  $500 \mu\text{s}$ , senkrecht  $50 \text{ mA}$  je Seite eines Rasterquadrats. Der Verlauf kommt qualitativ dem für  $\beta = \infty$  berechneten in Bild 8 sehr nahe.

Beim Schalten über Widerstände vom Röhrentyp mit genügend stark gekrümmter Kennlinie kann oftmals in guter Näherung mit dem Wert  $\beta = \infty$  gerechnet werden. Hierfür nimmt nämlich Gl. (46) die folgende äußerst einfache Form an:

$$\tau = \frac{1}{\alpha} \arctg \alpha x \quad (0 \leq x < 1), \quad (46a)$$

wie man auch unmittelbar aus dem Integral (38) erkennt.

### 3. Abschalten des nichtlinearen induktiven Gleichstromkreises

#### 3.1. Aufstellung der normierten Differentialgleichung

Eine verlustbehaftete Induktivität  $L(i)$  werde bis zur Zeit  $t = 0$  von einem Gleichstrom  $I$  durchflossen (Bild 11). Wir wollen diesen Strom im folgenden lediglich zur Unterscheidung von anderen vorkommenden Strombeträgen als „Spulen-Nennstrom“ bezeichnen. Im Zeitpunkt  $t = 0$  wird der als ideal angesehene Schalter  $S$  geöffnet, wobei sich die magnetische Energie der Spule über die Reihenschaltung von Verlustwiderstand  $R_v$  und Parallelwiderstand („Schutzwiderstand“)  $R_p$  „entlädt“. Gesucht sind der nach dem Abschalten im Entladekreis fließende Strom  $i$  und die Spannung  $u$  an der Parallelschaltung von Spule und Schutzwiderstand.

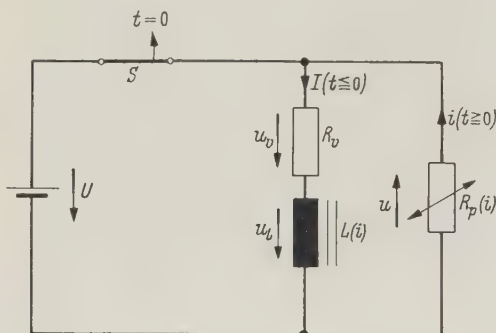


Bild 11. Abschalten eines Gleichstromes in einer Spule mit Eisenkern und nichtlinearem Schutzwiderstand.

Induktivität und Schutzwiderstand können nichtlinear sein. Ihre Kennlinien mögen dargestellt werden durch die bisher benutzten Ersatzfunktionen

$$u_R = k i^\beta, \quad (1)$$

$$\frac{\psi}{\psi_b} = \arctg \frac{i}{i_b}. \quad (2)$$

Die Hysterese sei vernachlässigt. Für  $t \geq 0$  lautet unter Benutzung der Bezugspfeile in Bild 11 die Maschengleichung des Entladekreises:

$$u_L + u_v + u = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d\psi}{dt} + i R_v + k i^\beta = 0. \quad (47)$$

Bildet man nach Gl. (2)

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{di} \frac{di}{dt} = \psi_b \frac{i_b}{i_b^2 + i^2} \frac{di}{dt}$$

und dividiert die Maschengleichung (47) durch das Produkt  $R_v \cdot I$  aus Verlustwiderstand und Spulen-Nennstrom, so nimmt Gl. (47) die folgende dimensionslose Gestalt an:

$$\frac{\frac{\psi_b}{i_b} R_v}{1 + \frac{i^2}{I^2} \cdot \frac{I^2}{i_b^2}} \cdot \frac{d \frac{i}{I}}{dt} + \frac{i}{I} + \frac{k}{R_v I^{1-\beta}} \cdot \left( \frac{i}{I} \right)^\beta = 0.$$

Hier führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$\frac{i}{I} = x; \quad t \cdot \frac{i_b R_v}{\psi_b} = \tau, \quad (48)$$

$$\frac{I}{i_b} = \alpha \quad (\text{Sättigungszahl}); \quad \frac{k}{R_v I^{1-\beta}} = \gamma. \quad (49)$$

Neben der schon im vorigen Abschnitt auftretenden Sättigungszahl  $\alpha$  erscheint hier eine neue Konstante  $\gamma$ , die eine ebenso anschauliche Bedeutung hat. Man erkennt das sofort, wenn man schreibt:

$$\gamma = \frac{k I^\beta}{R_v I} = \frac{u_{max}}{U}. \quad (49a)$$

Hier steht im Nenner die im stationären Betrieb an der verlustbehafteten Spule auftretende Spannung, die wir entsprechend dem stationären Strom mit „Spulen-Nennspannung“ bezeichnen. Im Zähler dagegen steht diejenige Spannung, welche unmittelbar nach dem Abschalten am Schutzwiderstand mit der Kennlinie Gl. (1) auftritt. Denn unter der hier gemachten Annahme eines idealen Schalters muß der volle Spulen-Nennstrom im Schalt Augenblick  $t = 0$  durch den Schutzwiderstand fließen.  $\gamma$  gibt also unmittelbar das beim Abschalten auftretende Überspannungsverhältnis des Kreises an.

Mit Gl. (48) und (49) lautet jetzt die Gleichung des Vorgangs in normierter Gestalt:

$$\frac{1}{1 + \alpha^2 x^2} \frac{dx}{d\tau} + x + \gamma x^\beta = 0. \quad (50)$$

Hierzu gehört die Anfangsbedingung

$$t = 0; \quad i = I; \quad \text{also} \quad x = 1. \quad (50a)$$

Sind Induktivität und Parallelwiderstand linear, so wird aus Gl. (50) wegen

$$i_b \rightarrow \infty; \quad \psi_b \rightarrow \infty; \quad \frac{\psi_b}{i_b} \rightarrow L; \quad \beta = 1; \quad \alpha = 0$$

und mit

$$\gamma = \frac{k}{R_v} = \frac{R_p}{R_v}; \quad \tau = \frac{t R_v}{L};$$

$$\frac{dx}{d\tau} + (1 + \gamma) x = 0, \quad (51)$$

mit der einfachen Lösung:

$$\tau = \frac{1}{1+\gamma} \int_x^1 \frac{dx}{x} = \frac{1}{1+\gamma} \ln \frac{1}{x}; \quad \text{oder} \quad x = e^{-(1+\gamma)\tau}. \quad (52)$$

Das Überspannungsverhältnis  $\gamma$  ist also hier gleich dem Verhältnis der beiden ohmschen Widerstände  $R_p/R_v$ . In den folgenden Unterabschnitten befassen wir uns mit den weniger einfachen Sonderfällen von Gl. (50).

### 3.2. Nichtlineare Induktivität mit linearem Schutzwiderstand

In der allgemeinen Gl. (50) ist in diesem Fall

$$\beta = 1; \quad \gamma = \frac{R_p}{R_v}.$$

Sie nimmt daher die folgende einfachere Gestalt an:

$$\frac{1}{1+\alpha^2 x^2} \frac{dx}{d\tau} + (1+\gamma)x = 0. \quad (53)$$

Nach Trennung der Veränderlichen ergibt sich unter Beachtung der Anfangsbedingung (50a):

$$\tau = \frac{1}{1+\gamma} \int_x^1 \frac{dx}{x(1+\alpha^2 x^2)} = \frac{1}{1+\gamma} \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{1+\alpha^2 x^2}{x^2(1+\alpha^2)}. \quad (54a)$$

Diese Beziehung läßt sich durch Auflösen nach  $x$  umkehren:

$$x = \frac{e^{-(1+\gamma)\tau}}{\sqrt{1+\alpha^2[1-e^{-2(1+\gamma)\tau}]}}. \quad (54)$$

Die Lösung (54) geht für  $\alpha = 0$  sofort in die einfache Gl. (52) des rein linearen Kreises über.

Obwohl die rechte Seite der Gl. (54) zwei Konstanten enthält, nämlich die Sättigungszahl  $\alpha$  und das Überspannungsverhältnis  $\gamma$ , läßt sich die Lösung zeichnerisch durch eine einzige Kurvenschar veranschaulichen, wenn man auf der Abszissenachse die Größe  $(1+\gamma)\tau$  abträgt. Bild 12 zeigt eine solche Schar, aus der

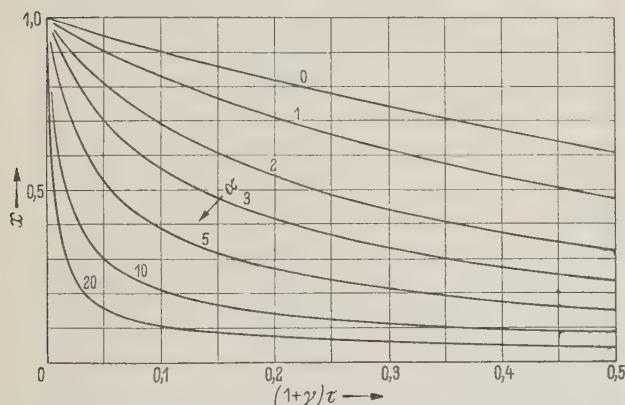


Bild 12. Abschalten einer Spule mit Eisenkern und ohmschem Parallelwiderstand bei verschiedenen Sättigungszahlen  $\alpha$ . Aufgetragen ist der bezogene Strom  $x = i/I$  über der Größe  $(1+\gamma)\tau = (1+R_p/R_v)t i_b R_v/w_b$ .

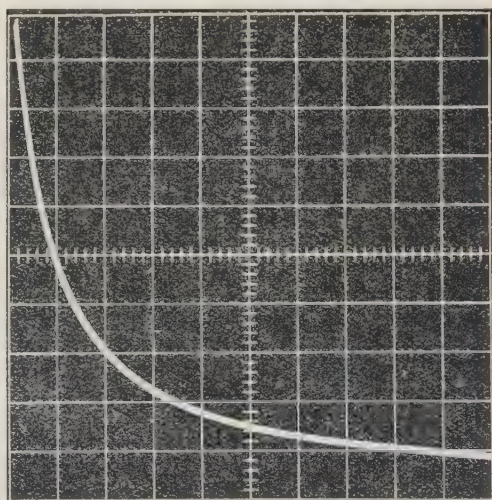


Bild 13. Der in Bild 12 für  $\alpha = 10$  berechnete Abschaltstrom ist hier an einer entsprechenden Schaltung oszillographiert. Rasterquadrate  $2 \text{ ms} \times 100 \text{ mA}$ . Zahlenmäßiger Vergleich zwischen gemessenem und berechnetem Verlauf im Text.

sich durch Interpolation und einfache Maßstabsänderung der Verlauf des Abschaltstromes und damit der Abschaltspannung bei ohmschem Schutzwiderstand für einen Sättigungsbereich  $\alpha = 0$  bis  $\alpha = 20$  der Eisendrossel ermitteln läßt.

Wir vergleichen eine Kurve der Schar Bild 12 mit einem entsprechenden gemessenen Stromverlauf, Bild 13. Abgeschaltet wurde ein Strom  $I = 1 \text{ A}$  in einer Spule mit Eisenkern,



deren Kennlinie sich durch die arcus tangens-Ersatzfunktion Gl. (2) mit den Konstanten  $i_b = 0,092$  A und  $\psi_b = 2,1$  Vs darstellen ließ. Der Verlustwiderstand der Wicklung betrug  $R_v = 32$  Ohm, der Parallelwiderstand  $R_p = 150$  Ohm; dem entspricht ein Überspannungsverhältnis  $\gamma = R_p/R_v = 4,7$ . Die Sättigungszahl ergibt sich zu  $\alpha = I/i_b = 10,8 \approx 10$ . Für die Umrechnung der bezogenen Zeitachse in Bild 12 erhält man mit Gl. (48) und (53a) folgende Beziehung:

$$t = (1 + \gamma) \cdot \tau \cdot \frac{\psi_b}{i_b R_v (1 + \gamma)} = (1 + \gamma) \cdot \tau \cdot \frac{\psi_b}{i_b (R_p + R_v)}.$$

Mit den angegebenen Zahlenwerten wird daraus:

$$t = (1 + \gamma) \tau \cdot 125,4 \text{ ms}. \quad (55)$$

Wir vergleichen nun Bild 12 und 13 bezüglich des Zeitpunktes  $t_{x=0,5}$ , in dem der Abschaltstrom den halben Wert des Spulen-Nennstromes annimmt. In der berechneten Kurve für  $\alpha = 10$  in Bild 12 liest man ab

$$(1 + \gamma) \tau_{x=0,5} = 0,0168.$$

Dem entspricht wegen Gl. (55) der Zeitpunkt

$$t_{x=0,5} = 2,11 \text{ ms}.$$

Im Oszillogramm dagegen liest man ab:

$$t_{x=0,5} = 1,90 \text{ ms}.$$

Der Fehler der Rechnung beträgt also hier etwa 11% vom gemessenen Wert.

### 3.3. Lineare Induktivität mit nichtlinearem Schutzwiderstand

Will man z. B. die Wicklung einer elektrischen Maschine vor Abschaltüberspannungen schützen, so ist die Parallelschaltung eines nichtlinearen Widerstandes vom Halbleitertyp wirtschaftlicher als die Verwendung eines ohmschen Widerstandes. Der Widerstand des Halbleiters nimmt bekanntlich mit zunehmender Spannung ab; dadurch kann bei einem vorgegebenen Überspannungsverhältnis  $\gamma$  der während des stationären Betriebes im Parallelwiderstand fließende Strom wesentlich kleiner gehalten werden als bei Verwendung eines linearen Widerstandes. Bezeichnen wir den im Parallelwiderstand fließenden stationären Strom mit  $I_p$ , so ist mit Gl. (1) und (49):

$$\frac{I}{I_p} = \left(\frac{k}{U}\right)^{1/\beta} \cdot I = \left(\frac{k}{R_v I}\right)^{1/\beta} \cdot I = \left(\frac{k}{R_v I^{1-\beta}}\right)^{1/\beta} = \gamma^{1/\beta}. \quad (56)$$

Bei gegebenem Überspannungsverhältnis  $\gamma$  ist die Wirtschaftlichkeit der Anordnung um so größer, je größer das in Gl. (56) links stehende Stromverhältnis ist. Damit folgt aber aus der rechten Seite der Gleichung, daß die Wirtschaftlichkeit mit abnehmendem Widerstandsexponenten  $\beta$ , d. h. mit wachsender Krümmung der Halbleiter-Kennlinie zunimmt. Gl. (56) zeigt auch, daß es unzweckmäßig ist, einen nichtlinearen Widerstand vom Röhrentyp ( $\beta > 1$ ) als Schutzwiderstand einzusetzen. Dabei ist die Wirtschaftlichkeit nämlich kleiner als bei Benutzung eines ohmschen Widerstandes.

Beim Entwurf einer Schaltung der hier behandelten Art geht man am besten so vor, daß man die beiden Verhältnissgrößen  $\gamma$  und  $I/I_p$  vorgibt. Danach kann man aus Gl. (56) zunächst  $\beta$  und anschließend aus Gl. (49) leicht  $k$  ermitteln, wodurch die erforderliche Widerstandskennlinie festliegt.

Wir kommen nun zur Berechnung des zeitlichen Strom- und Spannungsverlaufs beim Abschalten einer linearen Induktivität mit nichtlinearem Schutzwiderstand. In der allgemeinen Gl. (50) wird in diesem Falle  $\alpha = 0$ . Mit der Anfangsbedingung (50a) gelangt man zu dem bestimmten Integral

$$\tau = \int_x^1 \frac{dx}{x + \gamma x^\beta} = \int_1^x \frac{x^{-\beta}}{\gamma + x^{1-\beta}} dx. \quad (57)$$

Dieses Integral läßt sich für beliebige Werte von  $\beta$  sehr einfach ausrechnen. Substituiert man nämlich

$$\gamma + x^{1-\beta} = y; \quad (1 - \beta) x^{-\beta} dx = dy, \quad (58)$$

so geht Gl. (57) über in

$$\tau = \frac{1}{1-\beta} \int_{\gamma}^{1+\gamma} \frac{dy}{y} = \frac{1}{1-\beta} \ln \frac{1+\gamma}{\gamma}.$$

oder mit Gl. (58):

$$\tau = \frac{1}{1-\beta} \ln \frac{1+\gamma}{x^{1-\beta} + \gamma}. \quad (59)$$

Wir lösen diese Gleichung nach  $x$  auf, um zu der gebräuchlichen Darstellung des Stromes als Funktion der Zeit zu gelangen:

$$x = [(1+\gamma) e^{-(1-\beta)\tau} - \gamma]^{\frac{1}{1-\beta}}. \quad (60)$$

Für die Zahlenrechnung ist allerdings die Schreibweise (59) wesentlich bequemer. Aus Gl. (60) erkennt man dagegen eine bemerkenswerte Eigenschaft des Abschaltstromes: Übersteigt die bezogene Zeit  $\tau$  einen bestimmten Wert, so wird der erste Summand in der eckigen Klammer kleiner als der zweite, und der gesamte Ausdruck in der eckigen Klammer wird negativ. Wir wollen diesen Wert von  $\tau$  mit  $\tau_0$  bezeichnen. Dann gibt es also sicher Werte von  $\beta$ , für die  $x$  bei  $\tau < \tau_0$  imaginär wird. Da das hier physikalisch sinnlos ist, gilt Gl. (60) nur im Bereich  $0 \leq \tau \leq \tau_0$ . Für  $\tau = \tau_0$  wird der Strom Null; die entsprechende Kurve knickt in die Nulllinie um. Bild 14 zeigt eine Anzahl von Lösungskurven bei verschiedenen Parametern  $\gamma$ . Der Widerstandsexponent beträgt für alle in Bild 14 gezeichneten Kurven  $\beta = 0,2$ . Im Gegensatz zum vorigen Unterabschnitt ist hier eine einparametrische Darstellung nicht möglich. Den Wert von  $\tau_0$ , d. h. derjenigen Zeit, in welcher der Abschaltstrom völlig auf Null abgeklungen ist, erhält man leicht aus Gl. (59), indem man dort  $x = 0$  setzt:

$$\tau_0 = \frac{1}{1-\beta} \ln \frac{1+\gamma}{\gamma}. \quad (61)$$

Für  $\beta = 1$  wird  $\tau_0 = \infty$ , entsprechend der Exponentialfunktion.

Wichtiger als der Strom ist der Verlauf der Spannung an der Parallelschaltung des Bildes 11. Um auch hier zu einer übersichtlichen Darstellung zu gelangen, beziehen wir die Spannung auf ihren Höchstwert

$$u_{max} = k I^\beta = \gamma U.$$

Es ist dann einfach

$$\frac{u}{u_{max}} = \frac{k i^\beta}{k I^\beta} = x^\beta. \quad (62)$$

Aus Gl. (60) folgt damit:

$$\frac{u}{u_{max}} = [(1+\gamma) e^{-(1-\beta)\tau} - \gamma]^{\frac{\beta}{1-\beta}}. \quad (63)$$

Oder aus (59) für die Zahlenrechnung bequemer:

$$\tau = \frac{1}{1-\beta} \ln - \frac{1+\gamma}{\left(\frac{u}{u_{max}}\right)^{\frac{1-\beta}{\beta}} + \gamma}. \quad (64)$$

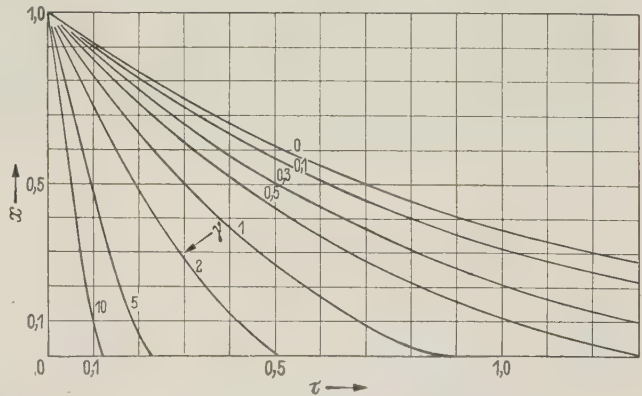


Bild 14. Abschalten einer linearen Induktivität mit Halbleiter-Schutzwiderstand (Exponent  $\beta = 0,2$ ). Bezogener Strom  $x = i/I$  über bezogener Zeit  $\tau = t R_v/L$ . Als Parameter dient das Überspannungsverhältnis  $\gamma = u_{max}/U$ .

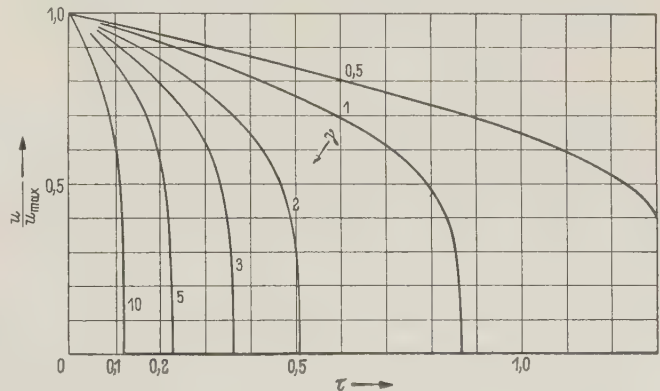


Bild 15. Wie Bild 14, jedoch Darstellung der bezogenen Spannung am Schutzwiderstand.

Einige Kurven der bezogenen Spannung sind in Bild 15 ebenfalls für den festen Wert  $\beta = 0,2$  aufgetragen. Die Oszillogramme Bild 16 und 17 bestätigen in besonders eindrucksvoller Weise

die hier erhaltenen Ergebnisse. Die abgeschaltete Induktivität ist eine Luftspule mit  $L = 2$  Hy und  $R_v = 114$  Ohm. Parallel dazu lag ein Widerstand mit den Kennlinienkonstanten  $k = 50 \text{ V mA}^{-0,2}$  und  $\beta = 0,2$ . Der Spulen-Nennstrom hatte den Wert  $I = 0,5$  A. Es ist also hier:

$$\gamma = \frac{k}{R_v} \cdot I^{\beta-1} \approx 3,$$

$$t = \tau \cdot \frac{L}{R_v} = \tau \cdot 17,55 \text{ ms}.$$
(65)

Als Schalter diente ein einpoliger Niederspannungs-Trennschalter, dessen Messer mit großer Federkraft herausgerissen wurden, um den Abschaltlichtbogen möglichst klein zu halten.

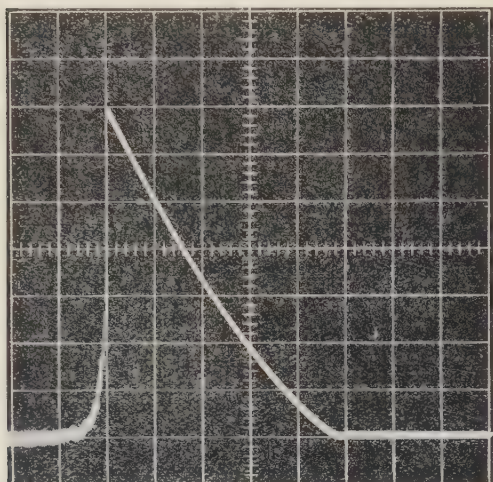


Bild 16. Oszillogramm des Abschaltstromes in einer linearen Induktivität  $L = 2$  Hy mit nichtlinearem Parallelwiderstand (Widerstandsexponent  $\beta = 0,2$ ). Das Überspannungsverhältnis beträgt  $\gamma \approx 3$ . Vergleich mit der entsprechenden berechneten Kurve (Bild 14) im Text. Maßstab: waagrecht 1 ms, senkrecht 50 mA je Rasterquadrat.

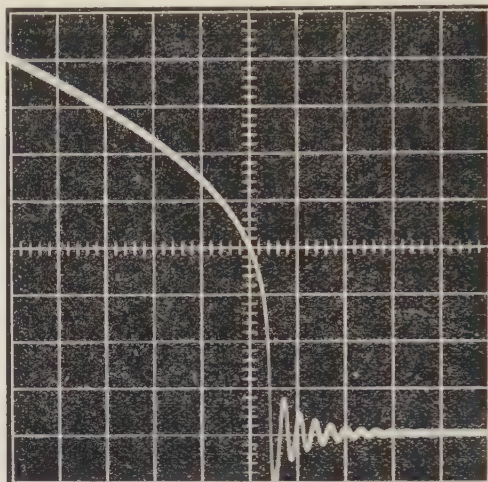


Bild 17. Spannungsozillogramm des Abschaltvorgangs Bild 16. Rasterquadrat 1 ms  $\times$  20 V.

In dieser Anordnung kam der Schalter dem für die Rechnung angenommenen idealen Schalter ziemlich nahe. Wegen  $\gamma \approx 3$  müßte nämlich  $u_{\max} = 171$  V betragen, während die höchste im Oszillogramm Bild 17 auftretende Spannung 160 V beträgt. Die Abweichung der Rechnung liegt also nur bei etwa 7% des gemessenen Wertes. Weiterhin vergleichen wir den Zeitpunkt, zu dem Strom und Spannung auf Null abgeklungen sind. In Bild 15 ist an der Kurve für  $\gamma = 3 \rightarrow \tau_0 = 0,36$ , oder wegen Gl. (65)  $t_0 = 7$  ms. In den Oszillogrammen liegt  $t_0$  bei 6,8 ms (in Bild 17 ist zu beachten, daß der Zeitnullpunkt links außerhalb des Rasters liegt). Auch hier stimmen also Rechnung und Messung gut überein.

#### 3.4. Nichtlineare Induktivität und nichtlinearer Schutzwiderstand

Wir kommen jetzt zur Integration der allgemeinen Differentialgleichung (50). Um dabei von vornherein den Rechenaufwand nicht zu groß werden zu lassen, beschränken wir uns auf den praktisch allein wichtigen Fall des Schutzwiderstandes mit  $\beta \leq 1$ . Ferner nehmen wir an, daß der Widerstandsexponent sich in der Form

$$\beta = \frac{1}{n}$$
(66)

schreiben läßt, also als gewöhnlicher Bruch mit dem Zähler Eins.

Aus Gl. (50) erhält man nach Trennung der Veränderlichen mit der zugehörigen Anfangsbedingung:

$$\tau = \int_x^1 \frac{dx}{(x + \gamma x^\beta)(1 + \alpha^2 x^2)}.$$
(67)



Wir verwenden hier zweckmäßig als Integrationsvariable die im vorigen Unterabschnitt, Gl. (62), eingeführte bezogene Spannung  $u/u_{\max} = x^\beta$ , indem wir substituieren

$$x^\beta = z; \quad dx = \frac{1}{\beta} z^{\frac{1}{\beta}-1} dz. \quad (68)$$

Damit wird aus Gl. (67) mit der Voraussetzung (66):

$$\tau = \int_z^1 \frac{n z^{n-2} dz}{(\gamma + z^{n-1}) (1 + \alpha^2 z^{2n})}. \quad (69)$$

Den einfachsten Fall  $n=1$  haben wir im Unterabschnitt 3.2. bereits behandelt. Wir können uns also in Gl. (69) auf  $n > 1$  beschränken. Dann steht unter dem Integralzeichen eine echt gebrochene rationale Funktion mit nur einfachen Nullstellen des Nenners. Wir nehmen zunächst an, daß  $n$  eine gerade Zahl sei. Es gilt dann für die erste Funktion im Nenner folgende Produktdarstellung:

$$\begin{aligned} \gamma + z^{n-1} &= \left( z + \gamma^{\frac{1}{n-1}} \right) \prod_{\mu=1}^{\frac{n-2}{2}} \left( z - \gamma^{\frac{1}{n-1}} e^{j \frac{2\mu-1}{n-1} \pi} \right) \left( z - \gamma^{\frac{1}{n-1}} e^{-j \frac{2\mu-1}{n-1} \pi} \right) \\ &= \left( z + \gamma^{\frac{1}{n-1}} \right) \prod_{\mu=1}^{\frac{n-2}{2}} \left( z^2 - 2 \gamma^{\frac{1}{n-1}} z \cos \frac{2\mu-1}{n-1} \pi + \gamma^{\frac{2}{n-1}} \right). \end{aligned}$$

Die Produktdarstellung des zweiten Nennerfaktors wurde bereits im Abschnitt 2. Gl. (42) angeschrieben. Mittels des bekannten Grenzwertverfahrens unter Benutzung der Ableitung des Nenners der Gl. (69) gelangt man zur Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} \frac{n z^{n-2}}{(\gamma + z^{n-1}) (1 + \alpha^2 z^{2n})} &= \frac{A_0}{z + \gamma^{\frac{1}{n-1}}} + \sum_{\mu=1}^{\frac{n-2}{2}} \frac{A_\mu z + \gamma^{\frac{1}{n-1}} B_\mu}{z^2 - 2 z \gamma^{\frac{1}{n-1}} \cos \frac{2\mu-1}{n-1} \pi + \gamma^{\frac{2}{n-1}}} \\ &\quad + \sum_{r=1}^n \frac{\alpha^{2/n} P_r z + \alpha^{1/n} Q_r}{\alpha^{2/n} z^2 - 2 \alpha^{1/n} z \cos \frac{2r-1}{2n} \pi + 1}, \quad (n > 1, \text{ geradzahlig}) \quad (70) \end{aligned}$$

mit folgenden Koeffizienten:

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{n}{n-1} \frac{1}{1 + \alpha^2 \gamma^{\frac{2}{n-1}}}, \\ A_\mu &= \frac{2n}{n-1} \frac{1 + \alpha^2 \gamma^{\frac{2}{n-1}} \cos \frac{2\mu-1}{n-1} 2n\pi}{1 + 2 \alpha^2 \gamma^{\frac{2}{n-1}} \cos \frac{2\mu-1}{n-1} 2n\pi + \alpha^4 \gamma^{\frac{4}{n-1}}}, \\ B_\mu &= -\frac{2n}{n-1} \frac{\cos \frac{2\mu-1}{n-1} \pi + \alpha^2 \gamma^{\frac{2}{n-1}} \cos \frac{2\mu-1}{n-1} (2n+1)\pi}{1 + 2 \alpha^2 \gamma^{\frac{2}{n-1}} \cos \frac{2\mu-1}{n-1} 2n\pi + \alpha^4 \gamma^{\frac{4}{n-1}}}, \\ P_r &= \frac{\gamma \cdot \alpha^{\frac{n-1}{n}} \cos \frac{2r-1}{2n} (n+1)\pi - 1}{1 + 2 \gamma \alpha^{\frac{n-1}{n}} \cos \frac{2r-1}{2n} (n-1)\pi + \left( \gamma \alpha^{\frac{n-1}{n}} \right)^2}, \\ Q_r &= \frac{\cos \frac{2r-1}{2n} \pi - \gamma \alpha^{\frac{n-1}{n}} \cos \frac{2r-1}{2n} (n+2)\pi}{1 + 2 \gamma \alpha^{\frac{n-1}{n}} \cos \frac{2r-1}{2n} (n-1)\pi + \left( \gamma \alpha^{\frac{n-1}{n}} \right)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Die Summanden der Partialbruchzerlegung sind elementar integrierbar. Wir erhalten als Lösung für geradzahlige  $n$  ( $n > 1$ ):

$$\begin{aligned} \tau = A_0 \ln \frac{1 + \gamma^{\frac{1}{n-1}}}{z + \gamma^{\frac{1}{n-1}}} + \sum_{\mu=1}^{\frac{n-2}{2}} \frac{A_\mu \cos \frac{2\mu-1}{n-1} \pi + B_\mu}{\sin \frac{2\mu-1}{n-1} \pi} \left[ M_\mu - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{z - \gamma^{\frac{1}{n-1}} \cos \frac{2\mu-1}{n-1} \pi}{\gamma^{\frac{1}{n-1}} \sin \frac{2\mu-1}{n-1} \pi} \right] \\ + \frac{A_\mu}{2} \ln \frac{1 - 2 \gamma^{\frac{1}{n-1}} \cos \frac{2\mu-1}{n-1} \pi + \gamma^{\frac{2}{n-1}}}{z^2 - 2 z \gamma^{\frac{1}{n-1}} \cos \frac{2\mu-1}{n-1} \pi + \gamma^{\frac{2}{n-1}}} \\ + \sum_{\nu=1}^n \frac{P_\nu \cos \frac{2\nu-1}{2n} \pi + Q_\nu}{\sin \frac{2\nu-1}{2n} \pi} \left[ N_\nu - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\alpha^{1/n} z - \cos \frac{2\nu-1}{2n} \pi}{\sin \frac{2\nu-1}{2n} \pi} \right] \\ + \frac{P_\nu}{2} \ln \frac{z^{2/n} - 2 \alpha^{1/n} \cos \frac{2\nu-1}{2n} \pi + 1}{\alpha^{2/n} z^2 - 2 \alpha^{1/n} z \cos \frac{2\nu-1}{2n} \pi + 1} \end{aligned} \quad (72)$$

mit den zusätzlichen Abkürzungen:

$$M_\mu = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1 - \gamma^{\frac{1}{n-1}} \cos \frac{2\mu-1}{n-1} \pi}{\gamma^{\frac{1}{n-1}} \sin \frac{2\mu-1}{n-1} \pi}, \quad N_\nu = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\alpha^{1/n} - \cos \frac{2\nu-1}{2n} \pi}{\sin \frac{2\nu-1}{2n} \pi}. \quad (72a)$$

Falls  $n$  ungerade, ist  $A_0 = 0$  zu setzen und die  $\mu$ -Summe von 1 bis  $\frac{n-1}{2}$  zu erstrecken. Alle Koeffizienten gelten unverändert.

Gl. (72) gilt, wie schon erwähnt, für alle natürlichen Zahlen  $n = \frac{1}{\beta} > 1$ . Setzt man in Gl. (71) und (72)  $\alpha = 0$ , so geht die allgemeine Lösung ohne Schwierigkeit über in die einfache Beziehung Gl. (64) für lineare Induktivität und nichtlinearen Widerstand.

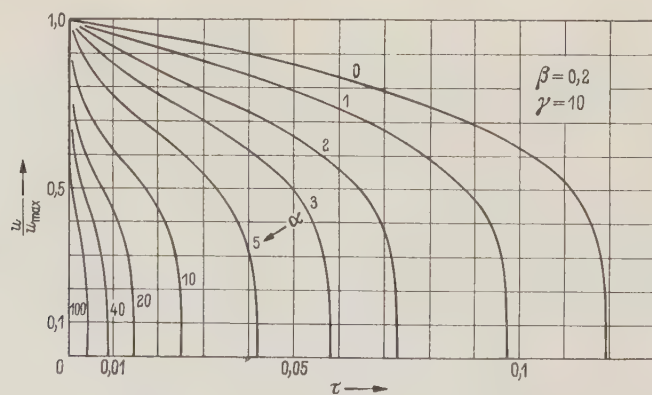


Bild 18. Berechnete Verläufe der bezogenen Spannung beim Abschalten einer Eisenkernspule mit Halbleiter-Schutzwiderstand (Exponent  $\beta = 0,2$ ). Sättigungszahl  $\alpha$  als Parameter. Das Überspannungsverhältnis beträgt für alle Kurven  $\gamma = 10$ .

Die Lösung (72) enthält drei Parameter, nämlich  $\alpha$ ,  $\gamma$  und  $n$ . Zur Veranschaulichung des Einflusses der Eisensättigung ist in Bild 18 eine Schar von Kurven der bezogenen Spannung bei festen Werten  $\gamma = 10$  und  $n = 5$  (also  $\beta = 0,2$ ) aufgetragen. Als Parameter dient also hier die Sättigungszahl  $\alpha$ . Mit zunehmender Sättigung fällt die Spannung immer schneller ab,

ferner tritt immer deutlicher ein Wendepunkt auf. Der Verlauf mit  $\alpha = 0$  in Bild 18 entspricht der Kurve  $\gamma = 10$  in Bild 15. Alle Spannungskurven knicken wiederum infolge des nichtlinearen Widerstandes in die Nulllinie um. Den Abszissenwert dieser Knickpunkte erhält man aus Gl. (72), wenn man dort  $z = 0$  setzt.

Aus Gl. (72) läßt sich der bezogene Abschaltstrom wie folgt gewinnen: Man rechnet eine genügend große Anzahl von Wertepaaren  $z, \tau$  aus und bestimmt zu jedem  $z$  den zugehörigen Strom  $x = z^{1/\beta} = z^n$ . Anhand dieser Tafel kann man dann  $x$  über  $\tau$  auftragen.

Wir bringen abschließend noch den Vergleich einer gemessenen Spannungskurve mit dem entsprechenden nach Gl. (72) berechneten Verlauf. Eine Spule mit einem Kern aus kornorientiertem Transformatorenblech wurde vom stationären Strom  $I = 250$  mA durchflossen und dadurch bis weit in die Sättigung hinein angesteuert. Ihre Kennlinie ließ sich im betreffenden Bereich in guter Näherung durch den Ausdruck

$$\frac{\psi}{V_s} = 2,1 \arctan \frac{i/\text{mA}}{9,17}$$

darstellen. Hier ist also  $\psi_b = 2,1$  Vs,  $i_b = 9,17$  mA, folglich  $\alpha = I/i_b = 27,3$ . Der Verlustwiderstand der Wicklung betrug  $R_v = 29$  Ohm. Parallel zur Spule lag ein Halbleiterwiderstand mit der Kennlinie

$$\frac{u}{V} = 23,2 \cdot (i/\text{mA})^{0,25},$$

d. h. mit  $k = 23,2$  V mA $^{-0,25}$ ,  $\beta = 1/n = 0,25$  oder  $n = 4$ . Das Überspannungsverhältnis ergibt sich zu

$$\gamma' = \frac{k}{R_v I^{1-\beta}} = 12,7.$$

Für die Umrechnung der normierten Veränderlichen  $\tau$  und  $z$  in die Größen  $t$  und  $u$  erhält man damit folgende Beziehungen:

$$t = \tau \cdot \frac{\psi_b}{i_b R_v} = \tau \cdot 7900 \text{ ms},$$

$$u = z \gamma U = z \gamma I R_v = z \cdot 92,2 \text{ V}.$$

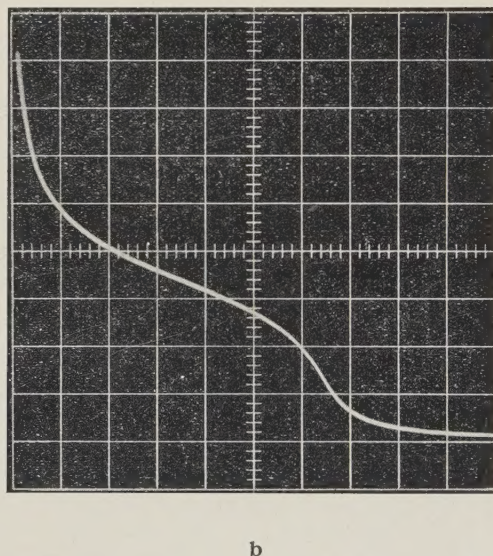
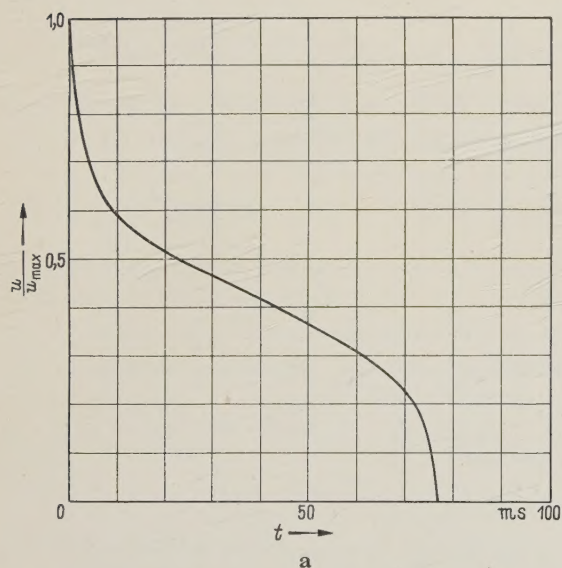


Bild 19. Abschalten einer Spule mit Kern aus kornorientiertem Transformatorenblech und nichtlinearem Schutzwiderstand ( $\beta = 0,25$ ). a) berechneter, b) oszillographierter Verlauf der Spannung am Schutzwiderstand im gleichen Maßstab. (Im Falle b liegt die Nulllinie eine Rasterteilung höher).

In Bild 19 ist der berechnete Spannungsverlauf dem oszillographierten gegenübergestellt. Die Zeitpunkte, zu denen die Spannung praktisch auf Null abgeklungen ist, stimmen recht genau überein. Der Spannungshöchstwert liegt dagegen bei der berechneten Kurve um etwa



12% höher, was unter anderem auf den nicht ganz zu unterdrückenden Abschaltlichtbogen zurückzuführen ist. Im ganzen gesehen ist jedoch die Übereinstimmung beachtlich gut, insbesondere wenn man bedenkt, daß für die Berechnung zwei Kennlinien durch Funktionsausdrücke zu ersetzen waren.

#### 4. Zusammenfassung

Mit Hilfe von rechnerischen Ausdrücken für Widerstandskennlinien und magnetische Kennlinien werden normierte Differentialgleichungen aufgestellt für das Einschalten einer nichtlinearen Induktivität in Reihe mit einem nichtlinearen Widerstand an Gleichspannung sowie für das Abschalten einer derartigen Induktivität mit parallel liegendem nichtlinearem Schutzwiderstand. Die Gleichungen enthalten die Sonderfälle, daß eines der vorkommenden Schaltelemente oder beide linear sind. Die Widerstände können eine Kennlinie mit Spannungsättigung (Halbleitertyp) oder mit Stromsättigung (Röhrentyp) haben. Die Strom- und Spannungsverläufe in den betrachteten Kreisen werden durch analytische Lösung der Differentialgleichungen gewonnen, wobei über die einfacheren Sonderfälle schrittweise zum allgemeinen nichtlinearen Gleichstromkreis mit induktivem Energiespeicher vorgegangen wird. Die Lösungen werden veranschaulicht durch Kurvenscharen, aus denen wegen der durchgeführten Normierung die gewünschten Ergebnisse in weiten Parameterbereichen unmittelbar entnommen werden können. Der Vergleich mit Messungen ergibt in allen Fällen eine befriedigende Übereinstimmung.

Das Aufnehmen der Oszillogramme erforderte den Bau besonderer elektronischer Hilfsgeräte, über den an anderer Stelle berichtet wird [10]. Bei allen Messungen hat mich Herr Dipl.-Ing. FRIEDRICH mit großem Geschick unterstützt. Der Leiter des Rogowski-Instituts, Herr Prof. Dr.-Ing. habil. E. FLEGLER, ermöglichte die Durchführung der Arbeit. Beiden Herren sei an dieser Stelle herzlich gedankt!

#### Literatur

- [1] TRICOMI, F. G.: Aktuelle Fragen in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. MTW-Mitteilungen Jg. 1958, S. 173—185.
- [2] VAN DER POL, B.: The Nonlinear Theorie of Electric Oscillations. Proc. Inst. Radio Engn. 22 (1943) S. 1051 bis 1086.
- [3] RÜDENBERG, R.: Elektrische Schaltvorgänge. 4. Auflage. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1953.
- [4] COLLATZ, L.: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. 2. Aufl. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1955.
- [5] PIPES, L. A.: Analysis of Electric Circuits Containing Nonlinear Resistance. J. Franklin Inst. 263 (1957) S. 47—55.
- [6] COHN, G. I.: Solution of Nonlinear Differential Equations by the Reversion Method. J. Appl. Phys. 24 (1953) S. 180—186.
- [7] IRVING, J., u. N. MULLINEUX: Non-Linear Circuit Equation. Electr. and Radio Eng. Jg. 1957, S. 53—55.
- [8] FISCHER, J., u. H. MOSER: Die Nachbildung von Magnetisierungskurven durch einfache algebraische oder transzendente Funktionen. Arch. Elektrotechn. 42 (1955/56) S. 286—299.
- [9] BÖNING, W.: Analytische Darstellung der Kennlinien nichtlinearer Zweipole. Arch. Elektrotechn. 45 (1960) S. 265—278.
- [10] FRIEDRICH, F.: Diplomarbeit. Rogowski-Institut der Technischen Hochschule Aachen, 1959.

Dr.-Ing. WALTER BÖNING, Siemens-Schuckertwerke AG,  
Mülheimer Werk, Laboratorium Generatorenbau  
Mühlheim/Ruhr, Engelbertusstraße 110





# Physik

## Ein Lehrbuch zum Gebrauch neben Vorlesungen

Von Dr. CHRISTIAN GERTHSEN †

Bearbeitet und ergänzt von Dr. HANS O. KNESER,  
o. Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart

Sechste Auflage

Mit 653 Abbildungen. XVI, 569 Seiten Gr.-8°. 1960. Ganzleinen DM 39,60

### AUS DEM VORWORT ZUR SECHSTEN AUFLAGE

Fast 4 Jahre nach CHRISTIAN GERTHSENS Tod zeigt sein „Lehrbuch zum Gebrauch neben Vorlesungen“ sich noch in kaum verminderter Frische. Worin sein besonderer Reiz besteht, ist schwer zu sagen; sicherlich zum Teil darin, daß man ihm auf Schritt und Tritt anmerkt, daß es aus der Feder eines leidenschaftlichen Forschers und Experimentators stammt. Diesen Reiz zu erhalten, mußte das erste Anliegen des Bearbeiters sein. Andererseits mußte der rasanten Entwicklung, die unsere Wissenschaft in den letzten Jahren erfahren hat, Rechnung getragen werden. Insbesondere darf man heute wohl nicht mehr sagen, die Festkörperphysik „paßt nicht in das Buch . . .“. Dem soll das letzte Kapitel dieser Neufassung abhelfen. Um dadurch den Umfang nicht allzusehr zu vergrößern, wurde eine Straffung der vorangehenden Kapitel nötig. Diese wurde angestrebt durch stärkere Verwendung von Kleindruck, der bei Anwendungsbeispielen und Apparatebeschreibungen durchweg und auch bei solchen Abschnitten benützt wurde, die der Student des ersten oder zweiten Semesters überschlagen sollte, und auf die nicht mehr oder erst viel später zurückgegriffen wird. Außerdem wurden historische Gesichtspunkte — auch in der Reihenfolge der Kapitel — mehr in den Hintergrund geschoben, womit wohl auch der veränderten Mentalität unserer Studenten entgegengekommen wird. Dem Ziel, den Leser unter Umgehung aller vermeidbaren Schwierigkeiten nahe an die Front der Wissenschaft zu führen, soll ferner die fast ausschließliche Verwendung des praktischen Maßsystems dienen . . .

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG





# Schütze und Schützensteuerungen

Von HERBERT FRANKEN, Direktor der Firma Klöckner-Moeller GmbH, Bonn/Rh.

Mit 241 Abbildungen. VII, 382 Seiten Gr.-8°. 1959. Ganzleinen DM 42,—

## INHALTSÜBERSICHT

Einleitung, Begriffe und Gliederungen · Die Schütze · Befehlsgeräte · Steuerzwischengeräte · Meldegeräte · Die Schaltpläne bei Schützensteuerungen · Das elektrische Steuersystem — Der Steuerkreis · Schützenkombinationen · Die Abdeckung (Kapselung) von Geräten · Die Lebensdauer der Schaltgeräte · Die Auswahl der Geräte · Die Prüfung · Beispiele · Schrifttum · Sachverzeichnis.

## AUS DEN BESPRECHUNGEN

„Zur Automatisierung gehört die Steuerung, zur Steuerung gehört das Schütz. Diese Betrachtung mag zu sehr vereinfacht sein, sie läßt aber die Bedeutung der Schütze und Schützensteuerungen im Rahmen des industriellen Geschehens erkennen. Der Autor, Direktor eines großen Industriewerks, als Fachmann durch viele Veröffentlichungen und seine Arbeit in den zuständigen Ausschüssen nicht nur in Fachkreisen bekannt, behandelt das Thema umfassend und gründlich; die physikalischen Grundlagen, die Gesichtspunkte für den Aufbau des Kontakt- und Kraftsystems, das Verhalten der Geräte auch unter anomalen Bedingungen und die zur Anpassung an die Bedürfnisse große Zahl von Befehls- und Schutzgeräten, die zusammen mit den Schützen die Schützensteuerungen ausmachen. Schutzart und Kapselung, Lebensdauer, Betriebssicherheit und Bewertung spielen bei der praktischen Anwendung eine große Rolle; deshalb sind ihnen wie auch der Prüfung der Geräte und der Auswahl weitere Kapitel gewidmet. Einige Beispiele von Programmsteuerung und Folgeschaltungen usw. bieten Anregungen für die Praxis. Ein sehr umfangreiches Literaturverzeichnis und ein gut gegliedertes Stichwortverzeichnis machen das gut ausgestattete Buch zu einem vorteilhaften Nachschlagewerk, das nicht nur dem Elektrotechniker, sondern dem Ingenieur ganz allgemein empfohlen werden kann: für Entwurf und Konstruktion von Steuerungen, für betriebliche Planung, für die Instandhaltung von Betriebsanlagen, aber auch für jeden, der in Theorie, Entwicklung, Labor und Prüfung mit diesen Fragen in Berührung kommt.“

*Elektrowelt, Ausg. B*

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG